

あなたと恋する物理学

電磁気学

Chapter 1 電磁気学の基礎

$$y_i = \mu$$

2019年6月16日

2 電位

2.1 電位とエネルギー

「ねえ！ 今日の授業で電位を扱ったんだけど、そっちの方が場の量としては適切じゃないかな？」

ばたばたと廊下を走って物理室にたどり着くなり、先に到着していたあかりに私はそう言った。

「……いきなりどうしたの、あおい」

「ああ、いや、ごめん。昨日ずっと考えてさ、場って何なのか」

私は汗で濡れた首元をハンカチで拭きながら、息を整える。「まだ考えてたんだ」とあかりは言った。

「それで、授業で電位ってのが出てきて……もしかしてここから電場の考え方が出てくるんじゃないかなって思ったの！」

「……なるほど。場があるのか、って話ね。うん、電位から電場を導くことはできる」

即答！ やはりあかりは知っている！

「だからさ！ 本当に存在するのは電場じゃなくて電位なんじゃないかなって思うんだけど、どう？」

「どう、と言われても……あおい、めちゃくちゃ興奮してるね」

「え？ そう？ 走ってきたからかな？ でもさ、この式を教室で見つけたんだよ」

私は荷物も置かずにチョークを手に取り、黒板に式を書く。

$$V = Ed \quad (2.1)$$

「この両辺を d で割れば、ちょうど電場がでてくるんじゃないかな？」

「あおい」

「何？」

「深呼吸」

「すーはーすー」

物理室の木の香りがする。心が落ち着く良い香りだ。あっ、あかりの香りの少しする。
シャンプー良いの使ってるのかな？

「カバン置いて」

「うん」

あかりの言葉に従って、カバンを肩から下ろした。

「落ち着いた？」

「……うん」

「よし。それって、何の式？」

おっと、完全にあかりを置いていって話してしまった。反省。

「えっと、電場 E の中で d だけ離れた場所の電位の違いだね。電位差っても言うらしいけど」

「……だったら、今のあおいの考えだと、結構まずいがあると思う」

と、あかりは言った。

「うん、だから、それをあかりに聞こうと思ってた」

問題があることはわかっている。だからこそ、あかりに聞きに行こうと思ったのだ。

あかりはふう、と一つ息をついて席を立った。

「まず電位について確認だけど……これはエネルギーと同じようなものと考えてるのかな。
電荷 q が電位 V の位置にあったら、その電荷は qV のエネルギーを持つ……ポテンシャルエネルギーを持つ」

$$U = qV \quad (2.2)$$

「うん、教科書の通りだね。……ん、あれ、なんで U で書くんだろう。エネルギーの E は電場とかぶるとしても、 P とか使えなかったのかな？ potential の P で」

「……それは電力と被りそう。Power の」

「ああ……電力かあ。まあ、記号はともかく、問題はこの電位と電場の関係だよ！」

私はチョークを探す。するとすぐにあかりがチョークを差し出してきた。

「ありがと。それで……こうなんだけど、これ、 d で割って $E = V/d$ ってすると色々問題あるよね」

「そうだね」

「まず、この $V = Ed$ って電場が一様な時にしか使えないし、 d が E と同じ方向じゃないといけない。それと、これは電位の差を考えてるだけ。電位差であって、電位ではない」

「そうだね」

「だからやっぱり『単純に d で割る』ってのはやっちゃいけないと思うんだ！ こう……なんか、なんというか……難しそう！ 点電荷の電位ってこうなるし！」

黒板に、教科書に書いてある式を書く。

$$V = k \frac{q}{r} \quad (2.3)$$

うまく説明できないけれど、さすがにこの2つ式をそのまま使うわけにはいかない。かといって、どちらも全く別々のことだとは思えない。どこか、共通したものがあるはずだ。

「だからあかりなら何か知ってるんじゃないかって！」

「……いや、私、物理についてはあまり知らないよ。エネルギー保存の時に使えるってことくらいしか……ああ、いや、わかったかも知れない」

あかりは何か納得したかのようだ。

「エネルギーを保存させればいいんだよ」

とあかりは言った。

2.2 エネルギー保存と電位差

「電位があるからエネルギーが保存する、じゃなくて、エネルギーが保存するように電位という考えを導入することもできるはず」

と、あかりは言った。

「……運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが、運動の前後で保存するってこと……そこから、逆算するってこと？ ……やってみる。ポテンシャルエネルギーは $U = qV$ で書けるから、えーと」

私は軽く黒板に式を書き、少しばかりの式変形をする。

力学的エネルギーというのは、運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U の和であつたから……

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + qV \quad (2.4)$$

という式ができるわけだ。もちろん v は質点の速さで m はその質点の質量だ。

エネルギーは保存して……ある時の運動エネルギーと電位を T, V とする。また別の時

運動エネルギーと電位を T', V' とする。こうすると、

$$T + qV = T' + qV' \quad (2.5)$$

$$T' - T = -q(V' - V) \quad (2.6)$$

となるわけだ。つまり……

「運動エネルギーの差が、電位の差で書ける。……あっ。この括弧の中身……電位の差だけど、これも電位差って呼ぶのかな」

「……？ 違うの？」

あかりがぼかんとした声で尋ねる。えーと、えーと。

「いや、そうだよ！ これが電位差だ！ 運動前の位置の電位と、運動後の位置の電位、の差！ 電位差に電荷をかけると、運動前後に変化した運動エネルギーの量がわかる！ 運動した後って普通は位置が変わるから！ 違う位置の電位を引いてるわけだ」

「『あと』引く『まえ』？」

「……それはあんまり重要じゃないかな。もともとはエネルギー保存則だし。式変形をしていくだけだよ」

「なるほど……でも物理としては、電位の差に特別な意味を込めているってことか」

「そういえば、磁場に同じようなものがあるのかなーって思って調べたけど、見当たらなかった。万有引力の位置エネルギーも、その差は特に気にしていなかったし。やっぱり工学的に扱いやす いってのが大きいのかなー」

「実際のエネルギー変化に使うのは電位だけか。……やっぱり、エネルギー変化から電位を考えることもできそう」

「どういうこと？」

「……ある基準点をおけばいい。電位 V ……いや、電位 $V(\mathbf{r})$ は『位置 \mathbf{r} に点電荷 q があった時に、ポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$ を与えるもの』だ。力学的エネルギーが保存することから、運動エネルギーの変化で電位の変化がわかる」

「……ある基準点での電位があるとして、そこからのエネルギー差で、電位を構成すること？ ああ！ 『エネルギーが保存するように電位を作る』ってことか！ えっと、じゃあ点電荷を考えると、どうなるだろう！？」

私は黒板に軽く図を描く。

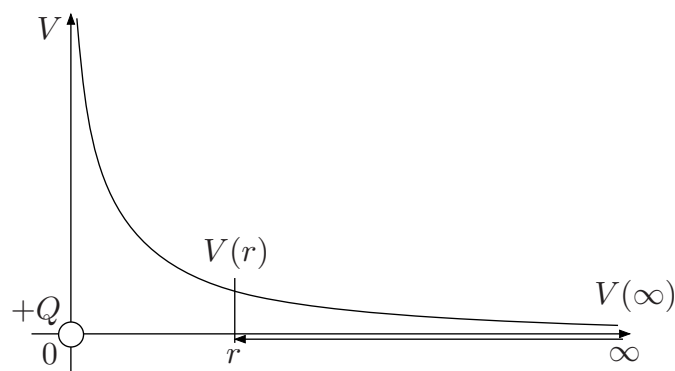


図1 中心 $r = 0$ にある電荷の作る電位

「えーと、ちょっと待って……速度は与えられて……ないよね。今は。運動エネルギーが変化するってことは……ああ！ 力と仕事の関係！」

私は思い出す。確か、力と仕事は積分の形に書けるのだった。あかりと一度力学について話し合った時にそういう話があったのを思い出す。

「電荷が得るエネルギーって、電荷が受ける力を変位で積分したものだよね！ 今回は座標を r として、こういう風にかける！ 力を経路で積分したらエネルギーになる！ そうだったそうだった！」

私はチョークを黒板に踊らせる。

$$T(r) - T(\infty) = \int qE \, dr \quad (2.7)$$

$$V(r) - V(\infty) = - \int E \, dr \quad (2.8)$$

そこにあかりの指が伸びてくる。

「積分範囲は ∞ から r まで。はじめ $r = \infty$ にいて、最後は $r = r$ のところにいるから。被積分関数はプラスでいい。 r から $r + dr$ まで動く時に電荷が受ける仕事を考えればそうなる」

「そっか！ ありがとうあかり！ えっと……計算は……」

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r E \, dr = -k \int_{\infty}^r \frac{Q}{r^2} \, dr = k \frac{Q}{r} \quad (2.9)$$

黒板に出来上がった式を眺める。これまで出た式よりも難しそうに見えるが、ただの見掛け倒しだ。左辺は結局のところ、ただ計算しているにすぎない。

「おお！ 確かに電位になった！ それで基準点だ！ $V(\infty) = 0$ ってすれば $V(r) = kQ/r$ で問題なく定義できる！ エネルギー保存則から電場が計算できるんだ！」

「……どちらかと言えば、仕事とエネルギーの関係だけど」

2.3 コンデンサー

「えーと、話を戻すけど……コンデンサーの電位だよ。はじめに考えていたのって。……ん、待って、この $V = Ed$ の d って向きによるよね？」

「……負極からの向きだね。教科書に書いてある」

「となると……正極の方が電位 V は高いのか！」

私は黒板にチョークで、下手くそながらも絵を描く。絵というよりは、図なのだけれど。

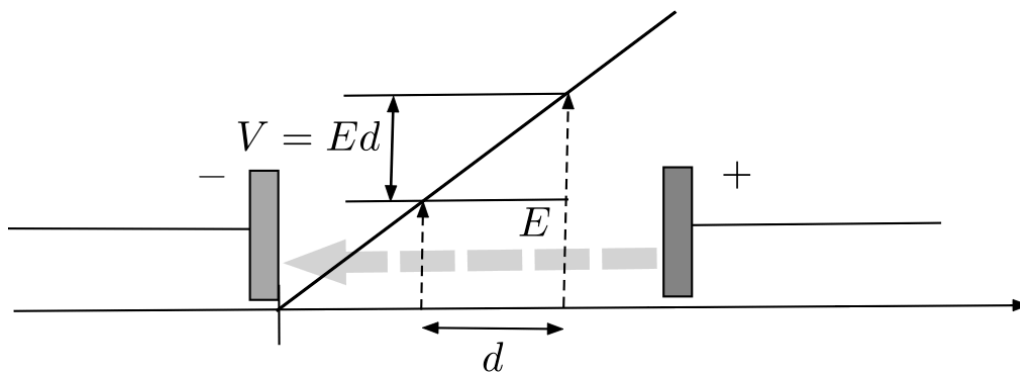


図2 コンデンサーの作る電位

「……この、微妙に太くなっている線が電位？」

「うん。負極のところで電位は0になる……まあ、式に愚直に従うならね」

「ん…… d って…… x でもなく……distance……？ あおい、なんか違うくない？」

「え？」

「……電位と、電位差。これを勘違いしてる、気がする」

「あ、あー！ そうだね！ 違うね！ distance って距離か！ ってことは……座標としてじゃなくて、あくまで『差』か！ えーと、じゃあ書き直さないといけないね。この d はどこから始めても良かったんだ」

コンデンサーの $V = Ed$ ……これは電位ではなく電位差だ。 x を使わずに d を使っていたのには理由があった。電位であれば $V(x) = Ex$ とでも書けるのだろうか。電位は位置の関数になるはずなのだから。位置の座標で書けばければいけないはずだ。

「さっきと同じく、仕事の積分を使って考えることはできる。……いや、少し待って」

「ん？ どうしたのあかり？」

あかりは少し考え込む。何かをイメージしているようだった。

「コンデンサーの作る電場って、一様なんだよね」

「ん、そうだったと思うよ。コンデンサーの中では、正極から負極の方へ、 E の均一な電

場ができる。……んん？ あれ、なんでだっけ？」

知識としては知っているが、本当にそうなるのだろうか。教科書に書いてあるということとは知っているが、本当かどうか確かめたことはなかった。

「ガウスの法則が使える。2つの極板のうち、1つを考える」

あかりは図を描く。

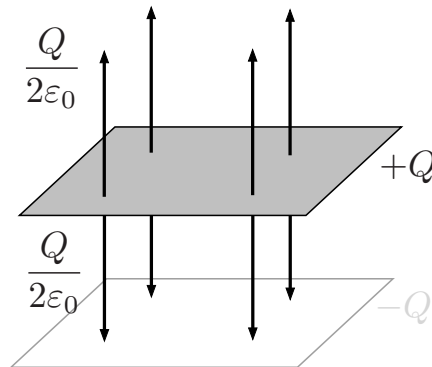


図3 コンデンサーの電極板が作る電場

「板の面積 S を貫く柱を考える。電気力線はおそらく、板に対して垂直な方向に引かれる。

あおいが昨日言っていた通り、電気力線の密度が電場の大きさになるとしたら……」

「ああ！ そっか！ となると……この S のなかの電荷を Q としたら……上と下で対称的になって…… $\frac{4\pi kQ}{2S}$ ……いや、 $\frac{Q}{2\epsilon_0 S}$ だけの電場ができるわけだ」

「…… ϵ_0 ？」

うん、と言って私は黒板に式を書く。

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \quad (2.10)$$

「教科書めくってたら見つけたんだ。 ϵ_0 は真空の誘電率っていうんだって」

「へえ……ま、定数なら議論に支障はないかな」

そう言って、あかりは黒板に向き直す。私も向きもどる。

「……ん、でもこれ外側にも出ちゃうよね、電場が……」

「もう片方の極板と、打ち消し合うんじゃない？」

「あ、そっか！ そうなると内側の電場の強さは2倍になって…… $E = Q/\epsilon_0 S$ になるわけだ！」

「電位の話をするときは、コンデンサー内の電場が一定であることが重要だけれどね」

「まあ、そうだけれどね。ありがとうあかり！」

「……いや、発展させられる」

あかりは一拍おく。なんだろう。この2つくらいしか電位は扱ってないはずだけれど。
「一般的な電場がある時の電位を考えることができる」

2.4 電場から電位を求める方法

「……つまり、位置エネルギーが力の変位積分で書けたように……電位は電場の変位積分で書けるはず」

「へえ……できるの？」

「できる」

書けるということにも驚きだけれど、それを即答できるというあかりの数学力にも驚きだ。さすが、というべきか……本当に、あかりは私よりはるかに先の方を勉強している。

あかりは黒板に式を書く。

「 $V(\mathbf{r}_0) = 0$ として……」

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2.11)$$

「……線積分だから、本当は積分範囲をこう書きちゃいけないんだろうけどね。ちゃんと経路を指定してやらないと」

黒板に書かれた式に、私は驚く。被積分関数にベクトルが入っている！ こんなことしていいのか……？

「……電場もベクトルで書いてるよね。ベクトルの積分もあるってこと？」

「うん。ただこの場合はあおいのやった積分のように、 $d\mathbf{r}$ だけ動いた時にかかる仕事を考えて、積分すればいいだけ。あおいの考えで問題はないよ」

「うーん……まあ、ともかく。やっぱりさっきの考えは間違っていないんだね！ ……ここでのマイナスって何？」

「ああ、これは……仕事とポテンシャルの式に合わせた形」

あかりはもう一つ式を書く。すでに消してしまった式に似ている。

$$W = T - T_0 = -q(V - V_0) = -qV$$

V_0 が消えている…… $V(\mathbf{r}_0) = 0$ とする、と考えたから、 $V_0 = 0$ を代入したのかな。

「ふうん……？」

それでいいのか。 $W = -qV$ という式だけで……いいのか。

力学の話を思い出そう。バネに繋がれた小球を考えて、その系が持つ弾性エネルギーは、小球が受ける力で積分をして、判断するんだった。

それと同じなのだ。ただし、電場は力そのものでないし、電位もポテンシャルエネル

ギーそのものではない。しかし、非常に良い対応関係があるのだ！ 力とエネルギー。電場と電位！

「お、となるとコンデンサーの方も……おお！ そっか！ よくできてるなあ！」

「これで、あおいの目標も少しできたんじゃない」

「え？」

最初の目標……なんだっけ？

2.5 電場と電位

だいぶ話し込んでいたようで、あと 1 時間ほどで下校時間だった。窓の外は沈みかける日を山が迎え入れている最中だった。斜めの陽が物理室の窓を照らし、私たちの影を長くする。

「電位から電場を求める方法」

あかりの一言に、どうして走って物理室に来たかを思い出す。

「……あー！ そうだった！ どうするの？」

「積分の逆をしてやればいいんだよ。つまり」

「微分ってこと!？」

「……そう」

あかりの言葉を先取りしてしまったが、そういうことだろう。微分！ 確かに微分で考えることができるのか！ 数学の授業でやったことだ。ちゃんと微分できる！ 積分したものを微分すれば、被積分関数が出てきてくれるではないか！

$$-\frac{d}{dr} \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{r^2}$$

「こんな感じかな？ マイナスはさっきの $W = -qV$ みたいな感じで！」

「そうだね。ただ、これはベクトルじゃない」

「あ、ほんとだ。んー、それぞれの成分でやらないといけないってこと？」

電場というのはベクトルだったっけ。

「まあ、そういうこと。で、ベクトル解析の知識を使うとね」

と、あかりはチョークを持ち黒板に数式を走らせていく。そこには私の知らないものが描き出されていた。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$$

「こういう風になるんだけど……まあ、説明が必要だから時間がある時にやる。基本的にはあおいの言ったようにすればいい」

「……この三角って、何？」

「ナブラ……今回は勾配だね」

「勾配って、傾き……傾きだよね」

「？ 確かに傾きだけど……どうかした？」

「勾配って……数学用語があるの？」

「ああ……うん、ある」

「へえ、そうなんだ……」

エネルギーと電位。力と電場。ここには対応関係がある。この間には……傾き、という関係がある。 傾き……微分。そう、電位を微分すれば電場になる。ということは……電位のグラフを書いた時、電場というのは、そのグラフの傾きそのものだということか。

「……うーん」

「よく分からない？」

「なんとなーくしか」

……正直なところ、グラフが平面に張り付いたものしか想像できない私にはわからなかった。勾配……なるものがあるのかもしれないけれど、私にはわからない……

「ごめん、やっぱり勾配って何か、知りたいかな」

「ん……それは大学数学の内容なんだよね」

「大学数学……」

高校までの知識でできるものではないのか……私では、やっぱり届かないんだろうか。

2.6 マクスウェル方程式との出会い

「電磁気学？」

私の家は学校から少し離れているため、登下校には電車を使うようにしている。そこで、私はたまに大学生の先輩、春さんと会う。スタイルも良く、ふわっとした茶髪。見習いたいものだが染髪禁止。

「そっかーそこに入ったかー。頑張ってるねー。これでもかっ！ っくらい受験に出るから」

「はい。……大学でも電磁気学ってやるんですか？」

「うん。やるよー。えっとね……」

春さんはカバンから1冊の本を取り出した。表紙には『電磁気学』と大きくタイトルが書かれていた。

「えっと……これ、Maxwell 方程式」

私は本を覗き込む。春さんの指差した式は、4つの式であった。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \quad (2.15)$$

「……？」

よくわからない。

いや、4つの式が並んでいるということはわかる。けれど、それ以外に何がわかろうというのか……。三角形？ 足し算引き算？

「最近はこれを勉強してるかなー。数学は少し必要だけど、なかなか可愛いだよ。この式」

可愛いこ……式をそんな風に、春さんは見ているのか。

「……………」

「あー、高校じゃ習わない数学だから、あおいちゃんがわからなくても、無理はないところだけどね」

「数学……」

あたりも確か、そう言っていた。大学数学の内容なんだから、と……そういえば、あかりも三角形を書いていなかったか？ 同じものなのだろうか……。

となると、大学まで待つか？ あと1年……受験勉強に専念してから、しっかり勉強する……。おそらく、それが最も賢いのだろう。

「……………」

私も、式を見つめる。4つの式、読めるのは B, E, D, H と j 、そして足すと引く、かろうじて掛ける。そのくらいしかない。

けれど……それは、何が書かれているのだろうか。

物理学は、数学ではない。つまり、数式がただあるというわけではなく、そこには意味があるのだ。

電気や磁気を考えるための……意味が。

「……？ どうした？ あおいちゃん」

「春さん、この式……私にも理解できますかね」

私はそう言って、春さんの方を見る。春さんは一瞬だけ驚いた顔をして、笑顔で答えた。
「もちろん！ あおいちゃんならできるよ！」

「じゃあ、教えて欲しいです！ 電磁気学を……知りたいんです！！」

私は、春さんに頼みこんだ。

引き受けてくれるだろうか、ということは頼んだ後に思ったことだ。もし引き受けてくれなかったら、私は……、

「うん！ わかった！ あおいちゃんの時間があるときにいいよ！ 何なら今週末でも！」

「えっ！？」

意外なほどに気の早い返事に、私は驚く。何ともまあ、あっさり……

「本当にいいんですか？」

「いいよいいよ。私の復習にもなるしね。あーでも……」

と、春さんは少し考えて、こう言った。

「数学に関しては、私よりもあかりちゃんのほうがいいと思うな」