

あなたと恋する物理学

電磁気学

Chapter 1 電磁気学の基礎

$$y_i = \mu$$

2019年6月16日

3 電束密度

3.1 電気双極子

「……春さんか。確かに、教えてもらえるとありがたいね」

「でしょ？ ……でも、私にわかるかなあ」

昨日、電車の中で春さんと出会ったことをあかりに伝えた。マクスウェル方程式を教え
てもらえるという話だった。あかりから数学について教えてもらうためにも、1週間必要
で……来週の日曜日に、春さんの通う大学へ集合となった。

「来週……ねえ。なんか私のいないところで話が進んでるなあ……」

「そこはごめんね、あかり」

「……あんまり、大学の内容を先取りしてもねえ」

あかりは髪の手先を弄る。

「先取りそのものを否定するつもりはないけど……私としては、あんまりね」

「……？」

どうしたんだろう。あかりがここまで言葉を濁すことが、あつただろうか。

「でも春さんに推薦されてしまったか……なら、仕方ないかな」

「うん、ごめんねあかり。勝手に話進めて……」

「いいよ。できないことではないし……Maxwell 方程式か。数学はともかくとして……文
字の意味さえ分かれば、問題ないと思う」

「あ、うん！ そう思ってさ、昨日けっこう調べてみたんだ！ えっと……電場 E については昨日やったから、まずは D について調べたんだ」

私は昨日調べたことをまとめたノートを開き、バックから取り出す。あかりは手を止めて、私の話を待っているようだった。

「授業でさ、コンデンサーの中に誘電体を挟んで、誘電分極が起きるって話があったじゃん？ ……あれを厳密に話すには、電気双極子ってのが大事なんだって」

黒板に図を描く。拙い図だが、あかりはわかってくれるだろうか。

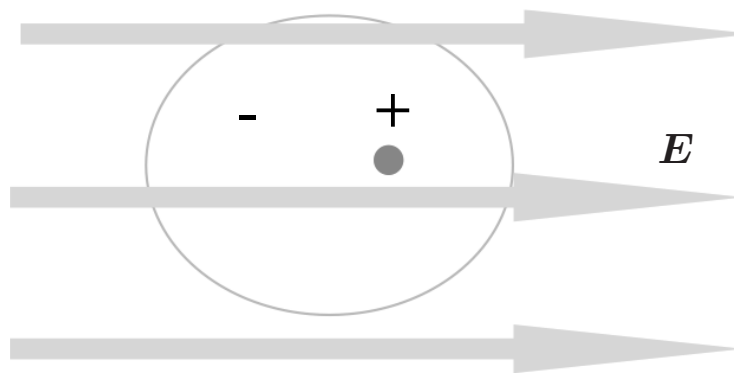


図1 外部電場によって電荷分布に偏りが生じる：誘電分極

「電気双極子ってのは、プラスとマイナスがくっついたもの……同じ大きさで、符号が逆の電荷。そういったプラスマイナスの電荷のペアが、誘電体の中にはたくさんあるらしいよ」

「……そんなペア、都合よくあるの？」

「あるんだよー。物質ってなんでも原子でできてるでしょ？ 原子核はプラスで、その周りにいる電子はマイナス。これって、電場をかけたらかうやって、楕円ぽくなって、プラスマイナスが偏るでしょ？」

プラスの電荷は電場の流れに従って力を受ける。マイナスの電荷は電場の流れに逆らって力を受ける。つまり、電場の中で原子はプラスマイナスが偏るのだ。

「なるほど……」

「それで、こういった電気双極子が、誘電体にはたくさんあるんだよ！ だから、誘電体に電場をかけた時、誘電体の中の電気双極子は決まった向きを向く。そうすると……誘電体の表面にプラスとマイナスの電荷が出てくるよね？」

私はもう一枚図を描く。電場をかけると、誘電体内の電気双極子の方向が揃う。すると、表面に電荷の偏りが生じる。

「そうだね……ああ、これが『誘起される』ということか。だから、『誘電体』……」

「そう！ 誘電体ってそういうことなんだ！ 両側に電荷が誘起される！ えーと、それで、どのくらい誘起されるかってのは、誘電率ってのに関係しててね！ えーとえーと」
ノートをめくる。

3.2 コンデンサー

「あ、そうだ。話は少し変わるけど、ガウスの法則って覚えてる？ 電場の大きさは電気力線の密度になる、みたいな」

「うん。この世界が3次元の空間だから、逆2乗則に従うということも」

「そう。それはいいんだけど、電場の大きさのところで k っていう比例定数を置いたじゃん？ 実はこれ、 $k = 1/4\pi\epsilon_0$ って定数に置き換えたほうがいいんだ。この ϵ_0 を誘電率……真空の誘電率って言う」

私は黒板に昨日の式を書き直す。わざわざややこしい形にするが、こっちの方がいいのだ。

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (3.1)$$

「へえ…… $4\pi kQ$ 本を、 Q/ϵ_0 本に置き換えたんだ」

「そうだね。だから、ガウスの法則は『電荷 Q のものから、 Q/ϵ_0 本の電気力線が出る』という法則になる。そして、その電気力線の密度が電場の大きさになる」

「なるほどね。点電荷の時は半径 r の級の表面積 $4\pi r^2$ で電気力線の本数 Q/ϵ_0 を割れば、電場の大きさになる」

「その通り！ それで、この考えをコンデンサーに適用すると、1枚の電荷 Q が溜まった板があった時に、電気力線は垂直に出る。そうすると、1枚の板が作る電場の大きさは、 $Q/2\epsilon_0 S$ になるんだ。2で割っているのは、おもて面とうら面の2つだね。それで、 $-Q$ の電荷を持つ板を平行に置くと、ちょうど外側は打ち消しあって……コンデンサーの中の電場の大きさは強め合うから」

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad (3.2)$$

「こう！ 合ってるよね？」

この式は教科書にもある式だ。うん、電気力線の密度が電場になる。基本的にはこの考え方で間違っていないだろう。

「確かに。……でも確か、 $Q = CV$ という式もあったよね。コンデンサー。それはどういう関係にあるの？」

「あ、確かに、コンデンサーの静電容量 C ってのもあったね。ええと……それには、 $V = Ed$ ってのが役立つね。今回 d は極板間の距離だね」

黒板に3つの式を書く。

$$V = Ed \quad (3.3)$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad (3.4)$$

「そうか。連立して……」

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.5)$$

「そういうこと！ もっとも、これは平行板のコンデンサーにしか適用できない式だからね！ でも $Q = CV$ っていうのはどんなコンデンサーにも成立する」

「そうね。それぞれのコンデンサーで、 S や d も違う……なるほど。静電容量 C さえわかっていたら電圧と電気量の関係が分かるのか」

「そうそう！ でももう一つ、 ϵ_0 ……誘電率も変わるんだ！ コンデンサーの中にどんな物質を入れるかによって、限られたサイズでも静電容量を変えることができるんだ！」

3.3 誘電分極

「なるほどね。あおい、さっき……言い直したよね？ 『誘電率』ではなくて、『真空の誘電率』だって。真空じゃないと誘電率は変わる……誘電って言うくらいだから、誘電体の中では、異なる誘電率を持つ……ということ？」

「ん、そう！ そういうこと！ さっすがあかりだね！」

あかりがちゃんと考えてくれていたことに、私は嬉しくなった。

「誘電分極、ってのがあある。誘電体を電場の中に入れたとき、誘電体の表面に電荷が出てくるんだ。プラス極板の方にはマイナスが、マイナス極版の方にはプラスがね。それで、誘電体の中の電場は少し弱くなるんだ」

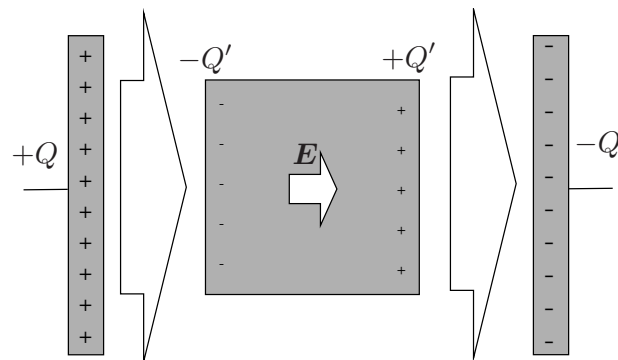


図2 コンデンサー内の誘電体の誘電分極

「……授業では『誘起された』と言っていた。電場によって誘起されたのか」

「そういうことだね！ で、この誘起された電荷 Q' なんだけど……もともとの極板に溜まっている電荷 Q に比例するんだって！ つまり、 $Q' = \alpha Q$ だね！ だから、電場の強さは……」

私は黒板に書いた式を書き換える。電荷はちょうど、 Q から $Q - Q'$ に変わったのだ。

$$E = \frac{Q - Q'}{\epsilon_0 S} = \frac{1 - \alpha}{\epsilon_0} \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\epsilon S} \quad (3.6)$$

「はい！ この ϵ のことを、誘電体の誘電率と言います！」

「ふうん…… $\epsilon = \epsilon_0 / (1 - \alpha)$ か…… α は正で……1 より小さい？」

「んーと……あ、そうだね。1 より大きいと、電場が逆向きになっちゃう」

「ということは、物質の誘電率は、真空中の誘電率よりも大きい。 $\epsilon > \epsilon_0$ ということか」

「そうだね！ 確かに！」

数値の大小は気にしていなかったなあ……いや、物理ではそれが何より大事なんだ。強い、弱い。大きい、小さい。しっかり確認するようにしよう。

「それで、この式の両辺に ϵ をかける。すると、左辺は ϵE になるけど、これを電束密度 D というんだ！ 真空中だったら、 ϵ_0 をかけて $D = \epsilon_0 E$ だけどね！」

$$D = \epsilon E \quad (3.7)$$

「……なるほど、 ϵ もある意味場の量なのか。そこにある物質で差が出るような」

「そういうこと！ そうすると、この式は物質があろうとなかろうと成立する！」

$$D = \frac{Q}{S} \quad (3.8)$$

「なんか、すごく電束密度って感じがしない？ 電荷を面積で割ってるんだね！」

「そうだね……この D 自体は、コンデンサーの中なら物質があろうとなかろうと同じなわけだ」

「確かに。そもそも電束密度は誘電体によらないように定義した量だからね。ああ……そこで、 E と D をつなぐものが誘電率 ϵ ってことね。なるほど……静電容量の式を暗記する必要はないんだ」

「そう！ すごいよね！ $V = \epsilon E$ も含めて、単純な3つの式から計算できるんだよ！」

電場と電位の関係。電束密度と電荷及び面積の関係。そして、電場と電束密度の関係。この3つの関係が互いに手と手を取り合ってダンスしている。その様子が私には浮かんでいる。

3.4 コンデンサーのエネルギー

「コンデンサーついでに、エネルギーも復習しておこうか」

「エネルギー…… $U = QV$ か」

と、あかりは私も間違えたことを口にした。

「あ、いや。実は、今回は違うんだよ。 $U = qV$ っていうのは、『ある電荷 q が電位 V にあるとき、 $U = qV$ のポテンシャルエネルギーがある』ってことなんだよね。でも、今回の V っていうのは電圧……電位差なんだ」

「……何か違うの？」

「えーと、電位の時って、粒子の位置が変わっても、もともとある電位とか電場が変わらないって話だったじゃん？ 今回の場合、極板の間隔が変わったら、電位や電場が変わるんだよ」

私は式を指差す。 $Q = CV$ と、 C の表式。極板間隔 d が変わったら、 C も変わる。極板の電荷 Q が変わらないから、 V は距離によって変わってしまう。

E はガウスの法則から変わらないけど……

「そっか……じゃあ、この極板がくつつくまでのエネルギーを考えればいいわけか。プラスがマイナスに引き寄せられる。その時に運動エネルギーに変換されるから」

$$U = - \int_d^0 QE_- dx = - \int_d^0 \frac{Q^2}{2\epsilon S} dx$$

ああ、確かに、エネルギーが力の積分だとするなら、その立場で問題はないだろう。

「そう……でもいけるのかな。私はコンデンサーの極板同士を回路でつないだよ。そうしたら電荷が dq だけ移動した時に、コンデンサーとしてはエネルギーが Vdq だけ失われることになる。これを積分すればいい。と思うんだけど」

$$U = - \int_Q^0 V dq = - \int_Q^0 \frac{qd}{\epsilon S} dq$$

私はあくまで $U = qV$ というのを使いたかった。微小な電荷が動く間なら、電位は変わらないだろうという判断だ。

あかりの計算と同じような積分だが、その意味はまったく違う。

「やってみよう」

「そうだね」

あかりと私は同時に計算をする。黒板とノート。違う音が物理室に響く。

こうしてあかりと同じ方向を向くことができるのが、私にはとても嬉しい。私はいつ

も、あかりに教えを請う側だったから。

「……できた」

あかりがそう言った。それと同時に、

「私もできた。……おお! 一緒だ」

$$U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon S} \quad (3.9)$$

果たして、私たちの出した結果は同じだった。私はあかりの出した式に質問をして、あかりは私の考えに質問をした。

一人の答え、一つの導出だけではない。二人の答え、二つの導出。何が同じで、何が違うのか。

電位と仕事、エネルギー。

語り合うのは、楽しかった。

3.5 電束密度

気づけばもう夕日が沈み始めていた。少しずつ暗くなっていく物理室。ここに居られるのもあともう少しだ。まあ、また明日も来れるんだけど。

「まあ、電束密度を使った計算ってそんなに無いらしいんだけどさ、調べた限り。……でもこれで、Maxwell 方程式の文字が一つだけわかったってわけだ」

私はマクスウェル方程式を書いたメモをあかりに見せる。

「電束密度 \mathbf{D} ……これを使えばガウスの法則はかなりわかりやすくなるのか……あと、クーロンの法則も」

なるほど、球の表面積 $S = 4\pi r^2$ を使って、中心にある点電荷からの電束密度 D を求めることができる。そして、その場所が真空だろうと誘電体だろうと、この式は成り立っている。というのが便利なところだ。

「……この右辺の ρ ってのは電荷密度か」

マクスウェル方程式のメモを見て、あかりはそう言う。

「そう……だったと思う。単位体積あたりの電荷量、かな」

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

「……ふうん。そっか、これがガウスの法則になるのか」

あかりは一人そう呟く。私にはその意味はわからなかった。

おそらくベクトル解析……というやつだろう。数式の意味がわからない私には……あか

りが何に納得したのか、知りたいという気持ちがある。

3.6 物理学にとっての数学

そろそろ、下校時刻だ。

私は、今日あかりがはじめに言ったことを、ずっと考えていた。

あかりはあまり、私に数学を教えることに乗り気ではないようだった。私としても、あかりに強要するつもりはないけれど……。

でも、私は……あかりと一緒に勉強したい。

「ねえ、あかり……」

私は勇気を出す。

「やっぱり、一緒にやらない？ 教えて欲しいとは言わないけど、質問……とか、進捗報告とか……」

あかりはこちらを向く。

……今は6月。まだ梅雨に差し掛かっていないけれど、もうじきその時はやってくる。それは何年も前から知っていることだ。

しかし、あかりのことは、実はまだ私は、よくわかっていない。

こうして物理室で一緒に勉強をするくらいには仲良くなっているものの、まだ出会って1ヶ月少ししか経っていないのだ。4月に同じクラスになって、5月に話しかけるまで。私はあかりのことを、何一つ知らなかった。数学が得意であること、私の言っている抽象的なことでも理解してくれること。そのくらいのことしかわからない。

「そうだね。……数学的な部分も、やってかなきゃまずいよね」

「うん……」

「……そこまで難しいのは必要なさそう。あおいにもわかるんじゃない？」

「え、そう!？」

「でもさ……そこまで、急がなくてもいいんじゃない？」

と、あかりは言った。

「今やらなくても、いずれやるよ。大学で……物理学科なら」

「まあ……そうかもしれないけどさ」

と言って、私は頭をかく。

心が騒いでいる。

物理室に流れる無音が痛い。

唾を飲む。

「それでも……私は気になるんだよ。もちろん大学に入ればやるってことは知ってる。でも……気になることは、悪いことじゃない……そうだよな？」

あかりに言う。

「知りたい、理解したい……そう思う気持ちは、悪いことじゃないはずだよ。物理でも、数学でも……私が、やりたいことなの」

あかりは何も言わない。

「もちろん、これで高校の勉強がおろそかになったらいけないことだってことも分かっている。難し過ぎて挫折するかもしれない。どこかで……つまらないって思うかもしれない」

「……っ」

「でもさ！ 知りたいんだよ……やっぱり。数学がわかっても物理はわからないかもしれない。でも……あかり。今は……私の好きにさせて」

と、私は……あかりに頼み込んだ。

あかりは私の方を見ていた。

そして、一つため息をついて、

「……わかった。あおいの情熱は。来週でいい？ 来週の、放課後」

「えっ？」

「……ベクトル解析の講義、するよ。でもその代わり、約束をして」

「……！ うん！ わかった！ なんでもするよ！！」

「6月28日。今月末。私の誕生日に……プレゼントをちょうだい」

「え！ うん！ もちろん！」

そのくらいおやすい御用だ！ 何もなくてもプレゼントをあげるよ！！

「あと、数学なら教えられるけど、私は物理を知らない……だから、残りの H や B については解説できない。数学は万能じゃないからね。だからそこを明日、私に教えて」

「うん。頑張って調べるよ！！」

「それと、春さんに、私が教えるってこと伝えて。以上。それが条件」

「うんわかった！ わーい！ あかり好きっ！」

私はあかりに抱きつく。あかりはあくまで冷静に私を引き剥がした。

いじけた私は、腹いせにもう一度抱きついた。

あかりの口元は、少し緩んでいた。