あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 1 電磁気学の基礎

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

4　電流と磁場

4.1　電流の作る磁場

　翌日もまた、物理室についた私達は物理について話す。ただ試験勉強や受験勉強のために私達は集まっているはずなのに、試験や受験には出てこないであろうことを話している。それが楽しいのだから、仕方が無いのだけれど。

　……言うなれば、これが私たちの『ガールズトーク』だ。

「昨日まで電場についてやったし、次は磁場についてやっていこう。教科書通りにやっていったら……えっと、直線の導線を流れる電流、それが作る磁場かな」

　私は黒板に絵を描く。上向きに流れていく電流、その周りに、ぐるっと、磁場が生まれていく様子。

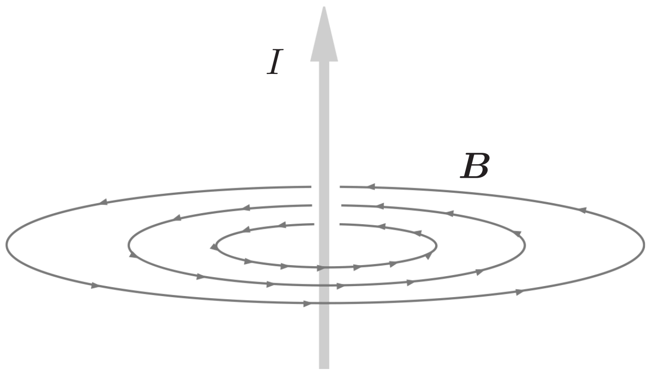

図１　導線周りに生じる磁場

「電場の時とは随分と印象が違うね。電場は放射状で、磁場はループ状」
「磁場ってループするのが普通らしいよ。この場合、えーと、電流に垂直な面で、電流の周り、半径 r の円で閉じている磁場になるね」

$$H = \frac{I}{2\pi r} \tag{4.1}$$

「ふーん……これは大きさなんだよね？　向きは……サインコサイン使って表さないと難しそう」
「そうだね。ベクトル……成分に分けてやるってなると、図を描いてやらないと難しいか。えーと……θ を z 軸となす角とすると……こうかな」

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \tag{4.2}$$

　外向きのベクトルが $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ になるはずだから、それに垂直……すなわち、内積が０。$\theta = 0$ の時も考えると……うん。この向きであっているはずだ。
「これって、θ の関数……いや、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数だ。ベクトルをもらったら、ベクトルを返す」
「位置ベクトルから、場のベクトルへの関数！　そういうのをベクトル場っていうんだよね！　磁場も変わらずベクトル場！　……式を見る限り、導線から遠ざかるほど磁場は弱くなっていくね。感覚的にそんな気はするね」
　あかりは私の言葉に、首をかしげ少し考える。
「……感覚的にって、磁場、感じられるの？」
「そりゃ、磁場から力を……ん？　あ、違う。えっと、磁場による力はまた別なんだった。あー……えっと、磁場の力は電流に深く関係していてね。単純には考えれないんだ。でも磁石使えば感じ取れるんだよ。あ、その磁石もね……電流と考えれるんだ」
「……え？　磁石が電流？」

「うん！　さっきは電流を直線状にしたけど、次は円を描くように流すよ！」

　私はもう一つ図を描く。導線が円形に配置されていて、電流 I が流れている。その中心を通るように矢印を書く。これが磁場だ。

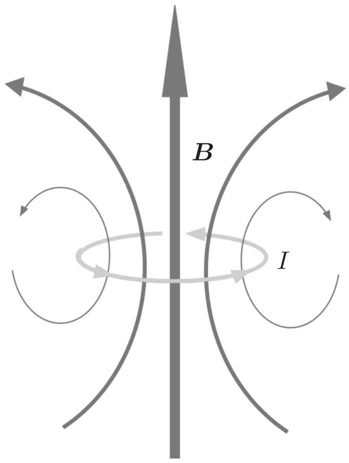

図 2　円電流が作る磁場

「……ちょっと待って、これって電流流れるの？　ただ導線があるだけでは流れないと思うんだけど」

「いや、電流はあるんだよ。電気回路で電源が必要なのは、抵抗でエネルギーが失われるから。ただ導線の中……抵抗 0 な導線を伝わるだけだったら、回り続けるんだよ。ほら！　原子核の周りを回る電子みたいに！」

「そっか。エネルギー損失がないならいいのか。うん」

「で、この時の磁場は……この円の中心での磁場の大きさは、こう」

$$H = \frac{I}{2a} \tag{4.3}$$

「a はこの回路の半径？」

「そう。まあ、さっきとは違って、円電流の中心しか考えてない。だから r じゃなくて a にしたよ」

　私の持っている教科書ではどちらも r で書かれている。しかし円電流の場合は半径 a はどの位置に注目するかによらず、1 つ用意すれば一定のままだ。半径を変えるなんてことはしない。

「でも、『中心以外の場所』を考えたいんだ！　大きさはちょっとよくわからないけど……磁場の方向は、ぐるっとめぐり回っているんだよ！」

「へぇ……磁石みたい」

「そうなんだよ！　この円電流をぐるぐると積み重ねていったもの！　それが磁石になるんだよ！！」

4.2　磁石と磁化

「……つまり、磁石には電流が流れているということ？」
「実はそうらしいよ？　多分ね。原子核の周りを電子が回っていて、その方向が揃うから、似たような状況を作り出すみたいだよ！」
「うん。それで、これでもやっぱり磁場がぐるっと回るらしいよ」
「そうか……磁場ってループするんだ」
「うーん、磁場ではなく、ループするのは磁束密度っていうんだ」
　そう。ここが難しいところだ。磁束密度と、磁場。記号で書くと、磁束密度が B で、磁場が H だ。
「……何が違うの？」
「『磁化』ってのを考慮しているかどうかだっけな。コイルに電流を流すと、コイル中心を軸にして磁場ができるよね？　その時、その中に鉄芯を入れる。そうすると、このコイルから出てくる磁場は……強化される。より強い磁場を作ることができる」
　小学校の頃に実験をしたことがある。あの頃はただそういうものだと思っていたけれど、今ならわかる。あれは非常に良い実験だったのだ。
「その鉄芯を取り出した時、まるで磁石のようになっていた。これが磁化だった」
　小学生の時は『すごい』『楽しい』で終わっていた。それはそれでいいことだけれど……
「それで？」
「これを電流を使って考えてみるよ」
　小学生の時と違うのは、さらにその要因を数式で考えることができるということだ。
「そうすると、磁石ってのは周りに電流が巻きついているものとして考えられる。つまり、鉄芯の側面に電流が生じたと考えられる」

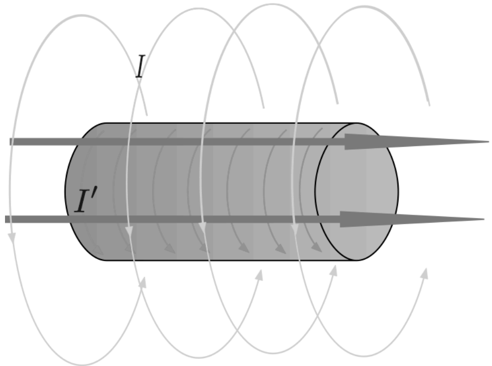

図 3　鉄芯を巻きつける電流が鉄芯の側面に電流を作り、磁場が強化される

「側面に……電流」

さっきあかりが言ったように、起電力がなければ電流は生まれない。しかし、あくまでも抵抗による電圧降下を考えなければ、そのまま電流はループしていくのだ。

「磁化という現象は『磁場をかけると鉄芯の側面に電流ループができた』ということなわけだ。地場の原因はコイルだったから、コイルの電流に加えて、新しい電流ができたってことになる。側面を流れる電流は I から $I + I'$ になったと考えられる。この I' を磁化電流っていう」

「……へぇ、面白いね。電束密度と同じように考えられるのか。……そして、どうせその直電流 I' は、もともと流した電流 I に比例する、って言うんでしょ？」

「さっすがあかり！　これを、こう……式変形していって」

$$I + I' = I + \beta I = (1 + \beta)I = \mu_s I$$

「比透磁率 μ_s が定義できるんだ！　そして、もう一つ電気と違うのはこの直電流の向きは元々のコイルの電流の向きと一致するんだ」

私は黒板の図に書き足していく。

誘電分極の時を考えた時は、プラス側にマイナスが、マイナス側にプラスが引きつけられていた。しかし、磁化の場合は電流は同じ方向に流れるのだ。

「へぇ……どうして同じ向きに電流ができるの？」

と、あかりは質問する。確かにそれは気になる。

「うーん、多分ローレンツ力で説明できると思う。ちょっと待ってて。ひとまずこうやって物質の透磁率ってのを考えることができるんだ。えーと。鉄の比透磁率が 5000 とか 18000 とか……不純物によって変わるみたいだけど、かなり大きいことがわかるね」

だからこそ、小学生でも実験できたのだ……なんとも、不思議なものだ。

4.3　磁束密度

「比透磁率……ということは、もとになるものがあるわけだ」

「真空の誘電率みたいなものだね！　真空の透磁率ってのがあるよ。そして、それに比透磁率をかけたものが物質の透磁率になる。真空の透磁率は μ_0 で表せるものだね。一般的な物質の透磁率は μ と書く」

「へぇ、それじゃあ、同じ質問になるけど……磁場と磁束密度の違いは？　同じ向きになるんだよね？」

「あ、そうとも限らないんだよ！　ええと……ここが電場と電束密度の関係とは違うんだけどさ、磁場 H は『磁化電流を考慮しない』もので、磁束密度 B は『全ての電流を考慮する』ものらしいよ！」

「磁化電流を考慮しない……ということは、磁石単体で考えれば、磁場 H はゼロになる？」

「そういうわけでもなく、磁石の別の部分から作った磁場はちゃんとカウントされるんだ。ただ、その位置での磁化電流を考慮しないから、複雑になるよ」

　正直、このあたりをちゃんと勉強するには、もう少し電磁気を分かった上でやらないといけない……のかな。

「……そうなんだ。その、真空の透磁率ってのはどうやってわかるの？　どんな実験？」

「あー、実はこれ、ちょっと前まで定義値だったんだよね。だから、本当に数学的な定義があるんだよ。あかりには悪いけど、μ_0 を測定する、ってことはしない。……今もしないのかな？　代わりに μ_s を測定することはいっぱいあるらしいけど」

「……まあ、それもそうね。……昔の定義値って、どのくらい？」

　私はノートに書いていた式を書く。

$$\mu_0 = 2\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \tag{4.4}$$

「今はこの値じゃなくて、誤差があるから注意してね。なんでこんな値だったかっていうと……測定しやすかったから、だね」

「……どういうこと?」

　あかりは訳がわからないという顔で私の方を見る。私は調べながら考えたことを伝える。

「結局、力学の世界に持っていかないと測定はできないんだよ。磁場ってのはあるだけじゃなくて、それが何らかの形で力にならないといけない。そのために必要なのが、ローレンツ力。『電流が磁場から受ける力』だね！」

「……そっか、電場だって力がないと測定できない。磁場も同じなんだ。そのローレンツ

力ってのがないと測定できない」
「そういうこと！　そして、ローレンツ力ってのはこの磁束密度を使って書くことができるんだ！」

4.4　磁束とファラデーの法則

「……にしても、磁束密度ってどんな密度？　電気力線の密度じゃなく磁力線の密度？」
「うーんと、磁力線……じゃなくて、磁束って概念があってね。えっと……磁束密度 B が一定な面を考えるよ。磁束密度ってのはベクトルだから、その面に垂直な方向の大きさ $B_\perp$ ってのがある。で、それと面の面積を S とした時に磁束 Φ を、その積 $\Phi = B_\perp S$ を磁束って言うんだ」

$$\Phi = B_\perp S \tag{4.5}$$

「……考え方としては内積か」
「そうだね。面に垂直な方向だけとってる」
「なら、面のベクトルを、その面に垂直で、大きさがその面の面積なベクトルとして、こう書けるわけだ」

$$\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = BS\cos\theta \tag{4.6}$$

「そっか！　そう書けばいいんだ！」
「……最も、$\boldsymbol{B}$ も場の量だから、面積分の形になるけど……一定なら問題はないか」
　あかりが数学的なことを言っている。このことも来週になればわかるのだろうか。
　でも確かに、この面 S 上で磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は一定だとして私は説明している。この 2 つの式だってそうだ。しかし、実際には磁束密度は位置によって違うだろう。そういう時にはどうすればいいんだろう……
「うん。それでどうして時速を定義したの？」
「あ、そうだ。実は、ファラデーさんが発見した、電磁誘導の法則ってのがあってね」
　教科書をめくり、私は式を書く。

$$V = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{4.7}$$

「電磁誘導……というと、磁気で電圧を作るんだっけ」
「そう！　正確に言えば、磁気の変化だけどね。ああ、磁気じゃなくて、磁束の変化だ。この Φ は時速で、t は時間ね。そして、N は、コイルの巻き数！」
「……その磁束は、どの面で定義している？」
「あ、そうだね。それが必要だった！　えっと、これは実は、コイルに発生する電圧……

起電力のことで、面はコイルの断面だね」

黒板に軽く図を描く。あかりはそれを見て、少し考える。

「……これは実験からわかったことなんだよね。その磁束を変化させることで、起電力が発生する……」

「そうだね。ファラデーさんってのは実験家だったみたいで、発見したらしいよ！　磁束の変化のさせ方にはいくつかあってね……コイルがある時に、磁石を近づけたり、遠ざけたりすることで変わる」

「ああ、磁場の変化を打ち消す向きに電圧が発生する……んだっけ」

「レンツの法則、だね！　起電力にマイナスがついているのも、そのせいだね。コイルをぐるぐるってたどった時……右ねじの進む方向が面の方向で、そっち方向への磁束を考えてる。それで、その方向への磁場が強くなる、つまり磁束が増えると……コイルのその巻く方向に対して、逆向きに起電力が発生する」

「ふぅん、それで 1 ループの N 回で積をとっている……これ、電流が一定の時は磁束に変化はないから、起電力は発生しない。定常電流ってこと？」

「まあ、そういうこと。それと、電流の大きさを変える時にも起電力が生じるね」

「ん、確かに。単体でもそんなことが起きるんだ……」

「起きちゃうんだよー！　流れる電流 I に対して、コイルの中の磁場……もとい、磁束密度 B は I に比例するよね？　そういうわけで、比例定数を L とおいて」

$$V = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} \tag{4.8}$$

「この式が成り立つ！　この L のことを自己インダクタンス、または自己誘導係数という」

「……確かに、$\Phi \propto I$ だからそれでいいのか。……$LI = \Phi$ のような式が成り立つから、磁束を定義しているのか。磁束密度も、同様に」

4.5　アンペールの法則

私は教科書を開いて、書かれている式を黒板に写す。

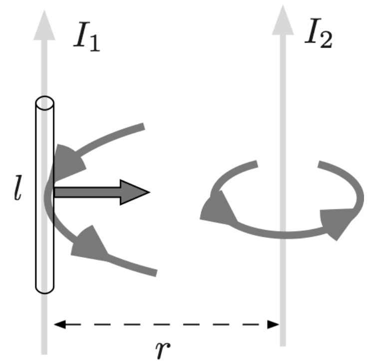

図 4　2 つの導線の間に働く力

「まず、これがアンペールの法則。アンペールの法則ってのを説明すると……真空中で、2 本の十分に長い 2 本の導線を、平行に置く。その 2 つの電流に、それぞれ I_1, I_2 の電流を流す。その時に、l の長さの導線には、これだけの力が働く」

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l \tag{4.9}$$

「ふぅん……電流の強さと、導線の長さに比例するんだ。その距離に反比例するのか。これは実験式でいいんだよね」
「うーん……今では実験式かな。昔までは定性的なもので……」
　と、私は言う。ここが少しばかり妙なのだ。
「あかりの言った通り、電流の強さと導線の長さに比例する。そして距離に反比例する。そういうような定性的な性質は事実だけど、でも、実際の数値関係は実験からは実はわからないんだ。というのも……電流の単位、アンペアがどういう風に定められたかってのが関わってくる」
　私は黒板に文字を書く。アンペアという単位……中学生でも知っているが、それを正しく把握している人はどのくらいいるのか。
『真空中に 1 メートルの間隔で平行に配置された無限に小さい円形断面積を有する無限に長い 2 本の直線状導体のそれぞれを流れ、これらの導体の長さ 1 メートルにつき $2\pi \times 10^{-7}$ ニュートンの力を及ぼし合う一定の電流』
「……これが、以前まで 1 アンペアの定義なんだったんだって。今はもうこの定義は採用されていないんだって。そして、さっき定義した磁束密度を使うと、こう書ける」

$$F = IBl \tag{4.10}$$

「なるほど。その式を物質中まで拡張するために、比透磁率 μ_s と磁束密度 B があるのか」
「そう。どんなものでも成り立つようにするためには、磁束密度 B を使ったほうがいい」

遠隔相互作用から、近接相互作用へ。力は離れて伝わるのではなく、場の影響を受ける。どのような場なのか。それはまず、磁場 H によって与えられる。これは人間の操作による量だ。電流の量と、導線の関係。そこに、どの物質かという情報を追加する。その情報を持っているのが透磁率。そしてそれらを掛け合わせた磁束密度とは、生じた電流全てを考慮した磁力の場なのだ。

4.6　電荷と電流の定義

「で、アンペールの法則をちょっとずつ解析していって、ローレンツ力に変えていくよ。そのためには、電流をミクロな視点で見ないといけない」
「ミクロな……電子ってこと？」
「そう。電流って電子の流れだってことは中学校でやったよね。定量的にどうやって考えていくかって話。で、その時にミクロな視点で見たときの電流の定義がある」
　黒板に導線をチューブ状に書き、その隣に式を書く。

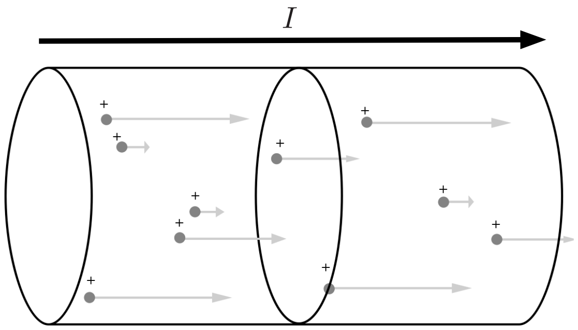

図 5　正電荷が移動する時の電流

$$I = envS \tag{4.11}$$

「……I はもちろん電流で、e は電子の電気量。n は電子の密度。S はこの導線の断面積。そして v が電子の速さだね。もちろんたくさんの電子の平均の速さだけど。ああ！　電子の進む方向と電流の方向は逆向きだからね！」

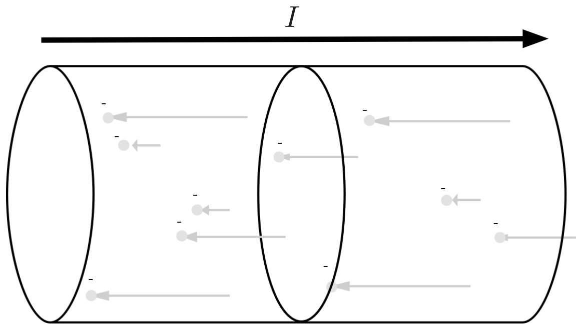

図 6　負電荷が移動する時の電流

「……単位はそれぞれ、$\mathrm{C}, \mathrm{m}^{-3}, \mathrm{m/s}, \mathrm{m}^2$……そして、電流の単位は A となるのか」
「そうだね。$\mathrm{A} = \mathrm{C/s}$ って書いた方が正しいかも。素電荷が基本単位になったからね」
「……そうなんだ」
　と、あかりはあっけにとられたかのような顔をする。
「まあ、私も聞いただけだけど……まあ、古典的な定義も知っておかないとダメだと思うよ。うん、これは図を描いてもらえれば分かると思うけど、1 秒あたりに断面 S を通過する全電気量になる。の向きと電荷が反対だから、プラマイの調整はしないといけないけど……」
「ふぅん……」
「あと、コンデンサーのところで $I = \Delta Q/\Delta t$ って式が出るんだけど……これはこういう風に解釈する。ある領域から導線が出ているとする。この領域の全電気量が変化すると、それと釣り合わせるために外向きに電流が生じる。まあ考えてみれば当たり前だね」
　と、私は軽く言ったが、あかりは少し考えた。
「……そこ、マイナスしないといけないんじゃない？　領域から電気量が減る時、電流が外向きに流れるんでしょ？」

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{4.12}$$

「あ、そっか。マイナスか！　確かに……」
　あかりの言う通りだ。電気量が減るということが、電流が流れ出るということなのだ。もちろん、向きの問題ではあるのだけど……。

4.7　ローレンツ力

「じゃあ、ローレンツ力に入っていくよ！　さっきはアンペールの法則っていう形で電流にかかる力を考えてた。でもさ、電流ってただ電子が移動しているだけ。つまり、本当に力を受けているのは電流ではなくて電子だってことにならない？」

「……まあ、確かに。書き換えればいいの？　その式を」
「そう！　ただ今回気をつけなきゃいけないのは、ただ一つの電荷が作る電流を考えてるってこと。だから、$n = 1/Sl$ ってしないといけない。$I = qv/l$ になるんだね」
　私は黒板に少しばかり計算をする。

$$F = IBl = qvB \tag{4.13}$$

「……単位も問題ない。いいと思う。ただ、l と S が何を表しているのか分からない」
「んー、そんなにこの l と S には意味がないと思う。ただ領域を区切るだけの役割かな。アンペールの法則も、長さ l に働く力、ってだけだった。この電荷さえ含んでいれば、長さはどうだっていいんじゃないかな……多分」
「……なるほど。ねえあおい。これって、電荷の進行方向と磁場が垂直な時だよね」
「ん？　そうだね……ああ！　直角じゃない時のアンペールの法則をやるの忘れてた！
えっと、方向は直角の時と同じで、大きさが $\sin\theta$ 倍になるんだよ！」
「……外積ね」
　と言って、あかりは席を立つ。長い髪が橙色の影に揺れる。
「外積を使えば、この式は簡単に書ける。……電場と同じ。電流も磁場も、どっちもベクトル。力ももちろんベクトル。だったら……ベクトルとして書く必要があるんじゃない？」

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.14}$$

　あかりは黒板に、アンペールの法則とローレンツ力を書き直す。$\sin\theta$ が抜けただけ……のように見えるけれど。これは何が違うのだろうか。何がどう変わったというのだろうか。
「ベクトル同士の掛け算に、外積ってのがあるの。2 つのベクトルに垂直に、大きさはその 2 つのベクトルの作る平行四辺形の大きさ……まあ、$\sin\theta$ をかけるってこと。この式にはすでに向きと大きさの情報が付随している」
「えっ……じゃあ、この式だけでいいじゃん！　そう！　それで全部だよ！　それが電荷 q が受ける力になる！　運動方程式もベクトルで書いたら、それで全部書けてる！」

4.8　物理をどうやって理解するか

「じゃあ、あかり、またね！」
　あかりはバス通学で、私は電車通学だ。自然、駅の前のバス停が別れる場所となる。
「うん。お疲れさま。今日で、だいぶいい感じに進んだね」

「まあ、そうだね」
　少し駆け足だったが、その 4 つに対して解説ができたのだ。これでマクスウェル方程式に含まれる場が全部出揃ったことになる。
「残りのわからない文字は、数学的な記号だけ」
「そこは私が補完する」
　と、あかりは頼もしく言ってくれた。心なしか、目が笑っているようだ。
「ただ、あおいの教えてくれたことを踏まえると、この方程式はそんなに難しくない」
「……そうなの？　なんか、とても難しいように感じるんだけど……」
「いや、違う」
　と、あかりは私の言葉を否定する。こういうとき、あかりは私の目をしっかり見てくる。
「多分……あおいは電磁気で一番難しいところを最初にやった」
「一番難しいところ……？」
「現象の理解」
　ずい、とあかりは私に顔を近づけてきた。こんなに近くで見たのは初めてで、思わず心臓が跳ねる。長い髪といい香りがして、頭がふわふわしてくる。
「現象を定性的にだけど、数式を用いて理解すること。……多分、物理はそれが一番大事なんだと思う。一番大事で、一番難しい。ここを乗り切ったらあとは問題ないくらいに。……ねえ、あおい」
「はいっ」
　急に名前を呼ばれて、素っ頓狂な声を上げてしまう。
「あなた……。いえ……」
　と、あかりは一瞬目を下に落とし、再度私の方を向く。

「あおい、あなたは……とても、物理に向いているんだと思う」

　あかりはいつになく真剣な顔でそう言ったのだった。褒め言葉と裏腹のその表情の意味は私にはわからず、ただ、あかりの整った目鼻立ちを眺めていることしかできなかった。