# あなたと恋する物理学
# 電磁気学
# Chapter 2 ベクトル解析

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

## 1　ベクトルと図形

　翌週、月曜日。私はあかりに会うことを楽しみにしていた。そろそろ梅雨になるとクラスのみんなが話している。雲が心なしか灰色に、厚くなっているように感じる。それを尻目に、私はいつも通り物理室に急ぐのだった。
「やあ、あおい」
「やっほ、あかり！　もうすぐ梅雨だねぇ」
　あかりは教卓に備え付けられた椅子に座り、ノート……否、ルーズリーフを見つめていた。私のことを待っていたかのようだ。
「そうだね」
「あかりは梅雨って好き？」
「……別に嫌いじゃないよ」
「えー？　濡れるの嫌じゃない？」
　あかりの髪は綺麗だから、雨に濡れたら整えるのが大変そうだ。と思っていたが、あかりは「？」と疑問符を飛ばすように、首を傾けた。
「……濡れたら拭けばいい」
　と、あかりはなんともたくましい返答をした。

## 1.1　ベクトルの内積

「さて、ベクトル解析の話だね」

「うん！　お願いします！」

　ベクトル解析。先週あかりに、電磁気学の理解のためには必要だと言われたものだ。これさえわかれば、電磁気が理解出来る……かもしれない。

「電磁気学とのつながりとしては、定量的に測れるってことかな。定性的な議論はあおいがやってくれたところだし。『何をすれば何が起きるのか』というのはあおいが言ってくれた」

　先週の金曜日に、あかりに言われたことを思い出す。

「……でも、『どのくらいの強さで起きるのか』が判断できないってことだね。先週の議論だけだったら、具体的な数字としては出てこない……そのために、ベクトル解析が必要ってことだね！」

「そういうこと。……まずは、ベクトルってなんなのか、ってことに関してだけど……単純に、いくつかの数字の組みとしておこうか」

「ん……うん。そうだよね？　足し算のできる矢印……だよね。それぞれの成分ごとで足し算引き算ができる」

「その通り。……そうだね。このくらいの理解でいいのかな。幾何学を考えればもっと言わないといけないけど……それは必要になったときにやればいい」

「幾何学……？」

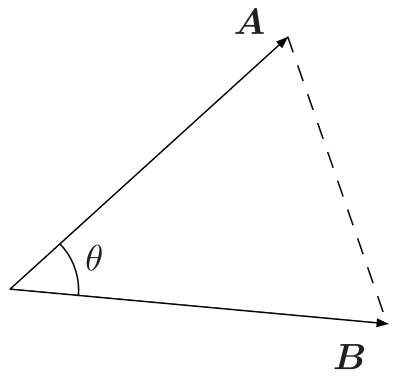
　図形とか、そういうことだろうか。確かにベクトルを使えば幾何の問題を解くことができる。

「座標系によるとかそういうもの。ただ、考える座標系を一つに固定するなら、数字の組みと扱って問題はない」

「そうなんだ……ああごめんねあかり、話の腰を折って」

「別にいい。まずは……内積だね」

　あかりは黒板に二つの矢印を描く。




「確か、成分どうしかけて足し合わせるんだっけ」
「いや、違う」
と、あかりは私の言葉を否定した。え？　違う……っけ？
「それは、定理。ベクトルの内積の定義は、少し違う。ベクトルの内積の定義は……『2 つのベクトルの長さと、そのなす角の余弦の積』」

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{1.1}$$

「あ、長さが定義だったっけ……角度もなんだ」
「成分どうしの和ってのは余弦定理を使えば出てくる。そして、これは逆にも言うことができる」

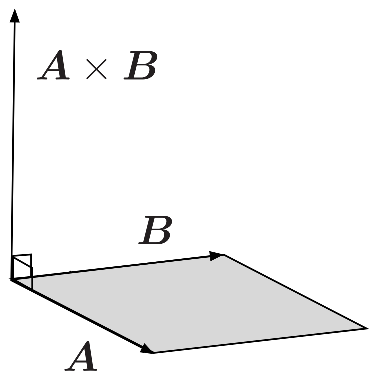
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.2}$$

「ん……これはつまり、どちらも同じってこと？」
「同値、だね。だから別に、成分どうしの和を定義としても、別に問題はない。単なる順番の問題」
「へぇ……」
どちらが定義で、どちらが定理か。その区別が、数学では大事になるのだろう。同じことだから、と投げ出してはいけないのだ。何がもとにあるか、その結果何が言えるのか。それが数学では大事なのだ……と思う。
「まあ、あおいの言った通り、成分どうしの和を定義にする流派もある。どっちでもいいね」
「あ、どっちでもいいの？」
「そっちの方が便利なこともある。実際、授業でやったように、2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が直交するとき……その内積は $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ になる。これを判定するには、成分どうしの和を考えた方が簡単」
「えーと、結論としては？」

「どっちでも良い」
　そっか……。なんというか、厳密なのかふわっとしているのか、よく分からないなぁ。

## 1.2　ベクトルの外積

「外積って、あおいは聞いたことがある？」
「いや……ないよ」
　外積……内積が内側への積だとすると、外積は外側への積だということだろうか。いや、内側外側ってなんだよ。よく分からない。
「二つのベクトル……$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して、外積の定義は、『大きさが $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の作る平行四辺形の面積であり、向きは $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ へ右ネジを回す時に、進む方向』だ」




　あかりはまた図を描く。大きさと向き。その 2 つがベクトルには必要なものだった。その二つさえ指定してしまえば、ベクトルは決まるということだった。
「……なんでそんな複雑なものなの？」
　私は単純に、感じたことを口にした。
「複雑……かなぁ」
「そう……だよね？　ちょっと直感的にはわかりにくいんだけど」
「……そうかもね」
　と、あかりは同意した。
「実は外積って、物理から生まれたものなんだよ。ローレンツ力を表現するために生み出された演算と言っても過言ではないくらいに」
「ローレンツ力？　ああ、向きは確かにそう」
「大きさもそうだよ。ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ のなす角が $\theta$ としたら、その 2 つのベクトルの張る面積は $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta$ になる。$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ と磁場 $B$ にしたら、ローレンツ力だと言え

る」
「あー！　そうじゃんそうじゃん！　あっ、これ本当にローレンツ力だ！」

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta \tag{1.3}$$

$$|\boldsymbol{F}| = q|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}| \sin\theta = q|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}| \tag{1.4}$$

なるほど！　式を書いてみればよくわかる。大きさの関係は先週やった通りだ。大きさに関して一致している。そして向きに関しても一致しているのだ！　となると……ローレンツ力はベクトルの外積で表すことができる！

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1.5}$$

「……これを成分で表したらこうなる。基底どうしの関係を考えればいい」

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

「ん？　縦に書くの？　……基底って？」
「あー……この 3 つ」

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

「これを考えれば、$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$……として、成分表示が示される」
「おお！　ああ！　そっか！　これでうまくいくんだ！」

これも恐らく、定義と成分表示が同じ……同値になるということか。示すことはできるのだろう。

「外積で大事なのは、『同じ方向を向いているとき、その外積は $\boldsymbol{0}$ になる』ということ」
「うん！　つまり速度と磁場が同じ方向を向いてたらローレンツ力は働かない！　うん！
確かにこれはローレンツ力だ！　外積って便利だねぇ！」

## 1.3　外積の性質

「代数的にも色々考えることがある。というのも、外積は積の順序を逆にすると結果が反転するんだ」

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.8}$$

「え？　なんで？」
「定義……あと、成分の表示からわかる。$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ へ回した時に右ネジが進む向きと、逆に、$\boldsymbol{B}$ から $\boldsymbol{A}$ へ回した時に右ネジが進む向きは逆」
「あ、そっか……へぇ。掛け算なのに交換法則が成り立たないんだ。内積の時は成り立ってたよね？　……成分表示を考えても、そうだね」

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.9}$$

「外積が交換法則を満たさない……って、確かに使い勝手は悪いね。でも、使い勝手が悪い分、逆に使い道は多い」
「使い勝手が悪い方が……？」
「まあ、確かに内積もよく使うけど、外積もよく使うということ。それだけ……ああ、あと、結合法則も成り立たないことがわかる」

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \tag{1.10}$$

「へぇ……」
「証明は反例があればいい。$\boldsymbol{e}_x \times (\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y) = -\boldsymbol{e}_y$ だけど、$(\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x) \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}$ だから」
「あ、そっか、同じ方向の外積は $\boldsymbol{0}$ になる……うん！　確かに！　そっか……反例が 1 つでもあればいいんだね」
　私はふむふむ、と頷く。
「ああ、内積と似ているところがあるとしたら、定数倍のベクトルを掛けると定数倍の結果が出てくる。確か、混結合法則って言ったっけな」

$$\boldsymbol{A} \cdot (\lambda \boldsymbol{B}) = \lambda \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\lambda \boldsymbol{B}) = \lambda \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{1.12}$$

「……うん、そうだね」
「まあ、あおいにはあんまり重要ではないだろうけど……数学としては、やっぱり大事だ

から、一応言っておく。ああ、あと必要なのは、この性質かな」

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \tag{1.13}$$

「線形性。……そもそも成分表示のためには先にこれを証明する必要があるんだけど……図形的な考察は少し面倒。でもできる。平行成分と垂直成分に分けるとかね……」
「あ、確かに図形から定義したからそうしないといけないのか。ん、この性質って、磁場の重ね合わせとかに使えるのかな。二つの磁場からのローレンツ力はそれぞれの磁場からのローレンツ力を足したものになるはずだし」
「確かに。線形性というのは物理においても結構重要なのかもしれない」

## 1.4　ベクトル・スカラー 3 重積

「さて、内積と外積を組みあわせることで、恒等式を作ることができる」
「恒等式……というと、どんな $x$ でも成り立つ式、だっけ」
「今回の場合、どんなベクトルでも成り立つ式」
　あかりは黒板に式を書いていく。$A, B, C$ の 3 文字がダンスしているようだった。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.14}$$

「外積と、内積……これは、スカラーなわけだよね？」
「そうだね。実数だ。これは $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の作る平行六面体の体積になる」
　と、あかりはまた黒板に図を描く。

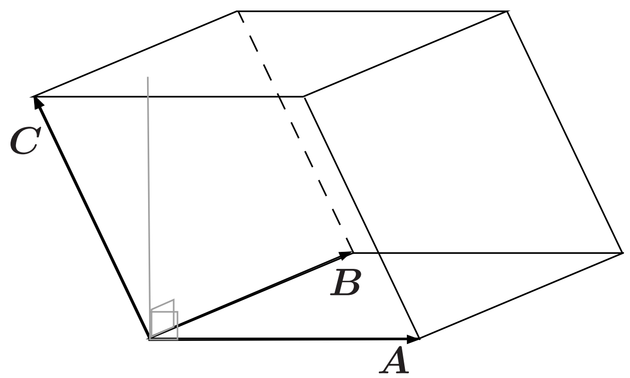



図 1　3 つのベクトルが作る平行 6 面体

「平行六面体……平行四辺形を拡張したような……向かい合う面どうしが平行ってことだよね？」
「うん。直方体をそのまま斜めにしたものと考えていい。大事なのはこの 3 つのベクトル

でできたということ」
「……この体積って言ったよね？　あー……そっか。底面の面積が大きさになって、向きはその面に垂直だから……」

この図で考えると……$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ の作る底面積が、$|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$ になるということだった。あとは、$\boldsymbol{A}$ が底面積に対してどのくらいの高さを持つのか、ということを考えればいい。そのためには……この底面に垂直なベクトルとの内積を取ればいい。$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ は、その条件を満たしている。これと内積をとることで、底面積かける、高さ、すなわちこの平行六面体の体積が得られるのだ。

「ただし、この値がプラスかマイナスかは、ベクトルの順番をどうするかに依存する。体積と言うためには、この絶対値を取らないといけない。等式が成り立つことについては……成分を書き出してやればすぐにわかる」
「すぐに……って、大変だと思うけど」
「確かにね。でも一度証明してしまえば、あとは自由に使える」
「うーん、わかった！　頑張ってみる！」

ノートに書いて、確かめてみる。ガリガリ計算していかないといけない……難しいというか、複雑だ。今回は複雑という意味で難しい。

「できた！　確かに。$A, B, C$ がくるくる回るとしたら、ちゃんと成り立つね！」
「ああ、あともう一つ。肝心な等式がある」

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1.15}$$

「ずいぶんこれも複雑だね……ここまでくると、怪しくなってくるよ」
「そう？　このベクトルが $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ の一次結合で書けて、$\boldsymbol{A}$ と垂直になると考えれば……」
「ああ、そっか！　確かに $\boldsymbol{A}$ との内積は $0$ になるね！　……でも証明は面倒だよね」
「そうだね。じゃあ、証明していこうか」

## 1.5　直線・曲線の表し方

証明は非常に面倒なものとなった。何度も符号を間違えた。計算している間に、『こんな計算に何の意味があるんだろう……』と考えてしまうほどに。

でも思えば、私も少し前はそうだったなと思う。数学をしても、つまらないと感じていた。でも、あかりと出会ってからだ。数学を教えてもらう中で、私は数学を使って何かを表すということに喜びを感じ始めていた。数学はただ計算をするだけではなく、もっといろいろなものを表すためにあるのだ。

あかりはその喜びへの鍵を教えてくれる。わたしもちゃんと、その鍵を受け取ろう。
「さて、外積の計算はこのくらいにしておこうか。次は、ベクトルで図形を表す方法を考える」
「図形？　……って、円とか正方形とか？」
「うん。それも表すことができる。まずは直線を表す。まずあおい、このベクトルは何を表しているかわかる？」
あかりは黒板の上に、$t$ という文字が含まれたベクトルを書いた。

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

「ん……これは……$t$ って、変数？」
「そう。$t$ は変数」
「じゃあこれは……$x$ 軸になるのかな？」
「その通り。こういう風に、変数 $t$ を動かしてやることで、直線を表すことができる。一般的にはこういう風に書ける」
あかりはさらなる文字を追加して、ベクトルを作った

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \\ z_0 + v_z t \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

「……おお！　えっ、この $v$ って、速度！？」
「そう。これはこう書き直すことができる」

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t \tag{1.18}$$

「すごい簡単になった……えっと、これって……$\boldsymbol{x}_0$ を通る、$\boldsymbol{v}$ 方向の直線……？　というか、等速直線運動だよね？」
「まあ、そう。数学的には、ここに $t$ の定義域を用意して、$\boldsymbol{r}(t)$ の走る位置をトラッキングしたら、直線を表すことになる。……逆に、任意の直線はこの形で表すことができる」
「うん！　そうだね！　これは物理でも便利そう！」
「$y = 2x$ という直線を書きたかったら、媒介変数を使って $x = t$ として、$y = 2t$ とすれば

いい。ベクトルとしてはこうなる」

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

「なるほど！　へぇ！　じゃあ、2 次関数とかもいけるの！？」

「それどころか、任意の曲線を書ける」

任意の……！？　その言葉に胸が躍った。

「……そんなに難しい話じゃない。そうだな……曲線の表し方には、実は 2 つの方法があるんだよ。あおい」

「え？　2 つ……というと、どういうこと？」

「まず 1 つ。ある方程式の解として表す。例えば $y = ax$ という直線はこう」

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\} \tag{1.20}$$

「$\mathbb{R}^2$ ってのは、実数の軸が 2 つある平面だっけ。右に条件を書いて、うん。確かにこれ直線だ」

「その通り。この直線は『$y = ax$ を満たす $(x, y)$ の組全て』を表している。同じように、これは円を表す」

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\} \tag{1.21}$$

「円の表し方は他にもある」

$$\{(x, y) = (a \cos\theta, a \sin\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\} \tag{1.22}$$

「方程式と、角度の 2 通りで表してるんだ。……それで、これがどうなるの？　あかり」

「はじめのものは陰関数表示、2 つ目のものは媒介変数表示という。この 2 つの表示の最大の違いは、『曲線上の点を具体的に書き表すことができるか』」

「……確かに、陰関数表示では図形が書き表せたとしても、点がパッとは出てこないよね。計算すればわかるけど……それに対して、媒介変数表示では $\theta$ を指定すればすぐに 1 つの点が出てくる」

「陰関数表示と媒介変数表示を一般的に書くとこうなる」

$$\{\boldsymbol{r} \mid f(\boldsymbol{r}) = 0\} \tag{1.23}$$

$$\{\boldsymbol{r}(t) \mid t \in I\} \tag{1.24}$$

「そこまで一般化できるんだ！　……$f$ ってのが陰関数……ってこと？」
「そう。さっきの例では $f(x,y)=x^2+y^2-a^2$。それと $\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^2$ が縦棒の左側に入る」
「そっか。じゃあ媒介変数表示でのこの $I$ は？」
「実数上の区間。適切にとる必要がある」
「区間……ああ、$I=[0,2\pi)$ のようなものか！」
　陰関数表示というのは方程式 $f(\boldsymbol{r})=0$ を満たす点を全て集めて線を作る、ということを表したものだ。しかし、点を具体的に書くためには $f(\boldsymbol{r})=0$ という方程式を解く必要がある。
　それに対して、媒介変数表示ではあるパラメーターを決めて、それに沿って点を動かしていく、ということを表す。一つの点が作る軌跡と考えることができる。

## 1.6　平面・曲面の表し方

「平面も直線と同じように、陰関数表示と媒介変数表示がある」

$$\{(x,y,z)\mid ax+by+cz=d\} \tag{1.25}$$

$$\{\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{A}+v\boldsymbol{B}\mid u,v\in\mathbb{R}\} \tag{1.26}$$

「……$a,b,c,d$ は定数でいいんだよね？　それと、下の……媒介変数の方は $\boldsymbol{r}_0$ を通る……えっと、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ が向きを定めて、それが張る平面……こ、こんな感じ？」
　私はノートに図を描く。これが一つの面を表しているようだということはなんとなくわかる。
「そう。これはどちらも平面を表す式」
「……この $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ と $a,b,c,d$ って、無関係じゃないよね。何かで……結ばれているはずだよね」
「その通り。そのためには、法線ベクトルって概念を用いたほうがいい」
「法線……ベクトル？」
「曲線の時の接線ベクトルと似てる。平面に垂直な直線を法線という。法線ベクトルってのは、法線に平行……つまり、平面に垂直なベクトル」
「平面に垂直な……あ。内積をとって 0 みたいな？」
「そう。法線ベクトル $\boldsymbol{n}$、そして平面を通る点 1 つ $\boldsymbol{r}_0$ を指定すれば」

$$\{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3\mid(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0\} \tag{1.27}$$

「こう書ける」
「おー。第 3 の表示だね！」
「いや、表示としては陰関数表示だよ。条件式は展開すれば、陰関数の形になる」
「……そっか！　$\boldsymbol{n}$ の成分を考えれば当たり前だね！」
「そう。法線ベクトルさえわかれば、平面がどのように傾いているかはわかる。問題は、その法線ベクトルをどうやって作るか。その方法を、あおいは知っているはず」
「え？　法線ベクトルの作り方……？」
「うん。2 つのベクトルがあった時に、その両方に垂直なベクトル」
「……あ！　外積か！　外積を使えば、法線ベクトルが構成できる！」
　法線ベクトルとして $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ とすれば、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が作る平面に垂直なベクトルを作ったことになる。
「そう。$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がわかっているなら、そうやって $\boldsymbol{n}$ を作ることができる。逆に……$\boldsymbol{n}$ から $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を作ることができれば、媒介変数表示ができる。……まあ、$\boldsymbol{n}$ は普通、大きさ 1 のベクトルとしてとるんだけど、大きさで割ればいいよね」
　確かに。法線の方向だけが重要なのであって、大きさは別にどうでもいい。『ある方向に垂直』それと『その面を通る 1 つの点』それだけで 1 つの面が指定できるのだ。
「曲面の表し方も大きく分けて二つ。陰関数表示と媒介変数表示。さっきと同じように考える」

$$\{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{r}) = 0\} \tag{1.28}$$

$$\{\boldsymbol{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in D\} \tag{1.29}$$

「あれ？　この $f(\boldsymbol{r})$ って曲線の時と同じじゃない？」
「あ……えっと、そこは少し面倒な事情がある」
　と、あかりはルーズリーフを机に置いて言った。
「このような $f(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たす解の空間……解空間って言うんだけど、その形は様々なんだ。例えば $f = 1$……どんな $\boldsymbol{r}$ を代入しても 1 しか返さない関数を使ったら、解空間には点が 1 つも存在しなくなる。$f$ は適切に選ばなければいけない」
「んー。そっか……あ、そっか。$x^2 + y^2 = a^2$ だって、$xyz$ 空間では円筒を表すもんね。$z = 0$ の時だったら円になる……いや、切り取る平面によっては楕円になるね」
「まあ、そうだね。空間を一意に表すには、適切な条件を与えないといけない」
「でも媒介変数表示のことがよく分からない……見たことないかな」
「$xy$ 平面なら $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ のようにすればいいよね。……一番単純なのは球面かな。半径

$a$ の球面はこう書けるよね」

$$\left\{ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a\cos\phi\sin\theta \\ a\sin\phi\sin\theta \\ a\cos\theta \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi \right\} \tag{1.30}$$

「えっと……$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ になるって点はいいね。あ、そっか……うん。よさそう」

図を描けばわかる。いつもの $xy$ 平面だったら、$x$ 軸から $y$ 軸へ弧を描くように角度を考えた。今回の $xyz$ 空間……3 次元空間の場合、$z$ 軸正の方向から $xy$ 平面に向けて弧を描くように角度 $\theta$ を。そして、$xy$ 平面に投影した時の $x$ 軸との角度 $\phi$ を測っているのだ。

「これは球面の極座標表示になってる。じゃあ、あおい、陰関数表示はどうなるかわかる？」

「陰関数……っていうと、$(x, y, z)$ がある方程式を満たすようにすればいいんだよね……あ、そっか。こうかな？」

私はノートにさっ、と書いてあかりに見せる。あかりはノートを覗き込むように前にかがんできた。

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \right\} \tag{1.31}$$

「その通り。円の方程式を書き換えればいいね。……まあ、面積分で使うのは媒介変数表示で、陰関数表示はあまり使わないけど。……ああ、面積分に関してはまた今度紹介するね」

「ふーん……えっと、まあ了解。表し方が 2 つあって、媒介変数の方が使いやすいってことだよね？　確かに、陰関数表示って、解いてみないとどんな形になるのかわからなさそうだね……」

## 1.7　ベクトルを解析するとは

「今日はこのくらいかな。内積と外積。そして図形を表示する方法」

「うん！　ありがとうあかり！　やっぱり数学で表すことができれば本当にいいよね……でもあかり、ちょっと聞きたいんだけどさ」

「何？」

「……なんで、図形の表し方をやったの？　授業でもいずれ扱うよね？　電磁気に必要なのかな、って思っちゃうけど」

「……わからないけど、必要だと思うよ。週の最後の方にガウスの定理をやろうと思うん

だけど、それは面積分……さっきちらっと言ったけど、面に関する積分についての定理なんだよ。ガウスの定理があれば、ガウスの法則を理解しやすいと思う」
「ガウスの法則って、電気力線が $4\pi kQ$……ああいや、$Q/\varepsilon_0$ 本出てくるってことだったよね。それと何か関係あるの？」
「ある。えっと、ベクトル解析がどういうものかってことなんだけど……ベクトルで微積分をするって話なんだ」
「……え？　ベクトルと……微分積分？」
「そう。今さっきやった曲線や曲面の表し方だけど、ベクトルでやったよね？　ベクトルの、媒介変数標示……パラメーター標示ってもいうんだけど、$t$ や $u, v$……その変数で、微分することを考えることができる。ベクトルの微分だね」
「……！？　そんなことできるんだ！？」
「うん……というか、運動方程式ってそうだよね？　位置ベクトルを $t$ で微分して、速度や加速度を考えている」
「あ、そっか！　へぇ！　微分ができるんだ……でも、積分ができるってのは？」
「授業でやった通り、積分ってのは微小な量の足し算。ベクトルに足し算が定義されている以上、それを無限に細かく分割して、全部足していけば、積分が定義できる。……詳しくは明日以降見ていくけど、まあそんな感じかな」
「うぅ……ん。えっと、じゃあ積分の復習が必要？」
「そうだね。……でもまあ、計算さえできればいいのかな。物理で必要なのは。……基本的な命題の証明は、数学の問題だから」
　と、あかりは言う。ルーズリーフをファイルにしまって、片付けを始める。
「……でも、心は理解しないといけないよね？」
「え？」
　あかりは私の方を見る。
「いくら物理が数学じゃないって言っても、数学をどう使うかってのは選ばないといけないわけでしょ？　だったら、それに適した目的のものを使ったほうがいい……と思う。点を表したり、ああ、図形を表すのにも、ベクトルってのが適しているわけで、面積とかそういうものを考えるためには積分を使う。……あかりの言う面積分ってやつも、物理学が使ってるってことは……それで表したほうが都合のいいことがある、ってことだよね」
「……まあ、そう」
「あ！　それがガウスの法則か！　ガウスの定理とガウスの法則！　同じじゃないんだよね？」
「うん。ガウスの法則とガウスの定理は別物。片方は物理で、片方は数学。数学はある意

味、物理の使う武器でもあるんだね」