あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 2 ベクトル解析

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

2　ベクトルの微分

　翌日、私はあかりの言っていたことを思い出しながら物理室に向かっていた。あかりは昨日、図形をベクトルでどう表すのかということを言っていた。その中で、ベクトルはパラメーターの関数として書かれていた。そして、ベクトルを微分し、積分すること。それがベクトル解析なのだということを言っていた。

「やっほーあかり！」

「うん」

　と、あかりは昨日と同じく黒板の前でルーズリーフを手に持ちながら待っていた。クラスは同じだがホームルームの時間が違うのだ。あかりのクラスはさっさと終わっていて、羨ましい。

「今日はなにするんだっけ？」

「ベクトルの微分。……でもその前に、昨日のやつについては大丈夫？」

「昨日の……というと、外積と、あとは図形の表し方だっけ。うん……大丈夫だと思うけど」

「媒介変数表示。覚えてる？」

「うん！　曲線は 1 つの変数 t で、曲面は 2 つの変数 u, v で表すんだよね！　ああそうだ！　ニュートンの運動方程式がそういうものだってことも思い出した！」

「ん……なら大丈夫かな。……ベクトル恒等式についてはいいか」

「あー、一応そこはちょっと復習した。ただ、使いどころがよくわからないから忘れちゃ

うかも……でも導出の仕方を覚えてるから大丈夫だよ！」
「……なら平気か。導出方法さえわかってれば。……でもあおい、わからないところがあったらちゃんと言ってね。私も……あおいにわかるように教えられるのかわからない。何か大事なところを飛ばして話すかもしれない」
「んー……まあ、その都度質問はすると思うから。私もよろしくね。むしろ私が理解できないかもしれない……それはあかりが悪いわけじゃないから」
「…………」
　あかりは私の言葉に黙り込んでしまう。
「ま、まあ！　まだ大丈夫だから！　……それに、嫌なら辞めたっていいんだし！」
「……え？」
　あかりはあっけにとられたような顔をする。
「いやまあ、始めたばっかりでこれを言うのもなんだけど……あかりが私に付き合う必要はないっていうか、私の好きで始めたことだから……さ」
　そう。あかりが私に付き合う義理はない。ただ友達だから、というのは理由にならないだろう。友達だって言っても、勉強まで見る必要はない。
「……あおい」
「ん？」
「私が、したいことだから大丈夫」
　と、あかりは言った。
「あはっ……ありがと、あかり」

2.1　ベクトル関数の微分

「じゃあ、今日の分やるよ」
「うん！　今日はなにするの？」
「ベクトルの微分。……それと、多変数関数の微分」
「微分っていうと、あれだよね。曲線の傾きを求めるやつ」
「そう。正確には、導関数を求めることを微分という……定義式はこう」

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.1}$$

「うん。これもグラフを書けばわかりやすいね。……で！　これをベクトルにも拡張していくんでしょ？」
「そう。と言っても、あまりやることは変わらない。拡張なんだから当然なんだけれど……

まず、ベクトルを微分するためには、そのベクトルは関数でないといけない。ベクトル関数。これを $\boldsymbol{F}(t)$ とする。この $\boldsymbol{F}(t)$ の微分はこう定義される」

あかりは黒板に式を書く。授業で見たことのあるような式が現れる。

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{F}(t+h) - \boldsymbol{F}(t)}{h} \tag{2.2}$$

「t から $t+h$ に変数が移動した時に、どのくらいの割合でベクトルが移動するか……ってことかな？」

「そう。普通の関数の微分を、そのままベクトルに適用した形になる。具体例を考えよう。例えば……このベクトルを微分してみる」

あかりはすっと、計算をする。

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{2.3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\cos(\theta+h) - \cos\theta, \sin(\theta+h) - \sin\theta) \tag{2.4}$$

黒板に書き終わった後、あかりはチョークを置き、こちらを向いた。

「さて、あおい、何かに気づく？」

「気づくっていうか……これ、成分ごとに計算すれば良くない？　ベクトルの割り算……ああ、掛け算か。それって、そのまま成分の掛け算割り算になるからさ。それで、それぞれの成分で極限を取ればいい」

「その通り、つまり」

あかりはもう一度チョークを手に取り、式変形をする。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}(\theta) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos(\theta+h) - \cos\theta}{h}, \frac{\sin(\theta+h) - \sin\theta}{h} \right) = \left(\frac{d}{d\theta}\cos\theta, \frac{d}{d\theta}\sin\theta \right) = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{2.5}$$

「このように、各成分の微分になる。これは定義からもわかることだよね」

あかりは黒板に縦線を引き、その線の右側にうつる。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

「そっか！　それぞれの成分を微分すればいいんだ！　……ところでこの t ってさ、時間を意識してるんだよね？　だったら位置 $\boldsymbol{r}$ の時間微分は速度 $\boldsymbol{v}$ になるんだ！」

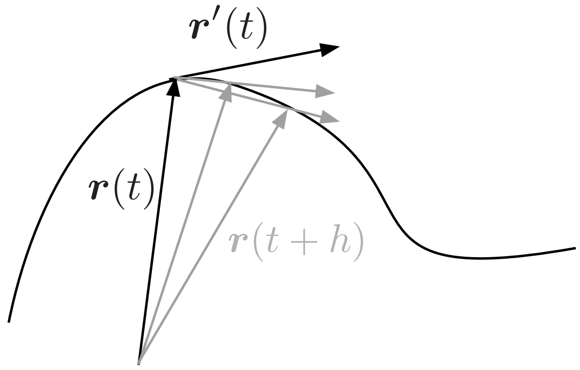

図 1　位置ベクトルを微分すると曲線に接する、速度ベクトルになる

「まあね。……角振動数を考えれば、ちょっとは面白くなるかな」
「え？」
「角振動数 ω で xy 平面を、振幅 A で円運動している質点を考える。この位置ベクトルは、こう書ける」

$$\boldsymbol{r}(t) = (A\cos\omega t, A\sin\omega t) \tag{2.7}$$

「速度ベクトルって、これを微分すればいいんだよね！こうだ！」

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) = (-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t) \tag{2.8}$$

「そして、加速度ベクトルはこう」

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t) = (-A\omega^2\cos\omega t, -A\omega^2\sin\omega t) \tag{2.9}$$

「2 階微分！　確かに！　あ！　これ！　運動方程式！」

$$m\boldsymbol{a} = -m\omega^2\boldsymbol{r} \tag{2.10}$$

「うん！　ここで力がどういう風に働いているかがわかるんだよ！　$\boldsymbol{F} = -m\omega^2\boldsymbol{r}$ なんだ！」
「ベクトル場……$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ という様に、その力って位置 $\boldsymbol{r}$ による。違う位置で同じ力が働くとは限らないから、そう考えないといけない」

2.2　多変数関数の微分

「なるほど。ベクトルの微分……これをもっと見ていくんだよね？」
　ベクトル解析というのだ。ベクトルの微分を見ていくんだろう。

「いや、もう少し拡張する」
「拡張……って？　これ以上拡張できるの？」
「できる。……あおい。曲面を表す時、どんなベクトルを考えた？」
「ん？　えーと……陰関数表示と、媒介変数表示……方程式を満たすベクトルと、2 つの変数で変化するベクトル……あっ。2 つの変数がある！　もしかして、それで微分するの！？」

そう、とあかりは言った。あかりは黒板に $f(u,v)$ と書いた。2 つの変数 u,v の関数だろう。

「ただ……2 つの変数で微分をするとなると、今までと同じようにはできない。微分は引き算をしないといけない。ずれた 2 つの点で。2 変数 (u,v) を考えるためには『どうやってずらすか』が問題になる」

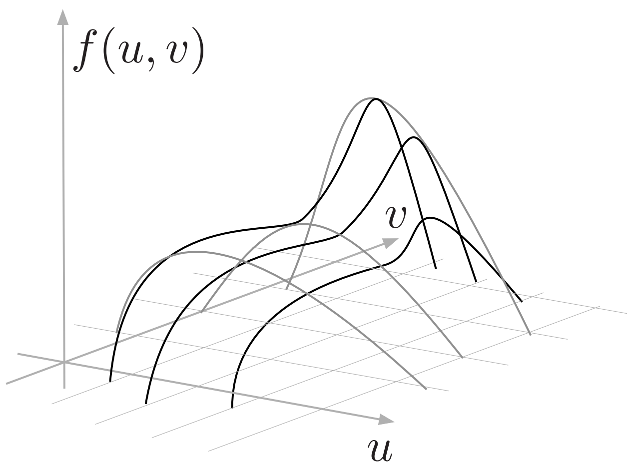

図 2　2 変数関数は平面からの高さとして考えられる

1 変数関数では微分をするとき $f(x+h)-f(x)$……x を h だけずらして変化を考えていた。2 変数関数で、どうやってずらすか……。

「ああ……確かに。1 変数だったら h を足せばずらせるね。……2 変数では『h だけずらす』って、わかんないもんね」
「そう。だから、『どうずらすか』決める必要がある。……まず考えられるのは、(u,v) を $(u+h,v)$ と $(u,v+h)$ にずらす方法。u 方向と v 方向。この 2 つについての微分……『1 つだけを動かし、他の変数を固定する』微分の事を、偏微分という。こう書く」

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=\lim_{h\to 0}\frac{f(u+h,v)-f(u,v)}{h} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=\lim_{h\to 0}\frac{f(u,v+h)-f(u,v)}{h} \tag{2.12}$$

「……？　あれ、この丸い 6 みたいなやつ、どこかで見たことがある気がする」
「マクスウェル方程式にある」
「え！？　本当に！？」
　私はバタバタと、カバンからノートを取り出す。マクスウェル方程式は何回か書いているはずだ。えっと……
「あ！　本当だ！　t で偏微分……ってこと？」
「うん。t で偏微分している」
「おおおー！　電場や磁束密度を時間で偏微分してる！　……あっ！　時間変化だ！　電場とか磁場の時間変化がどうなってるのかって式なんじゃないかな！？」
「……そうだね。ところで、この偏微分に対しては大丈夫？」
「あー、そこはよく分からないかも……。どういうこと？」
「具体例で考えよう。例えばこんな関数を考える」

$$f(x,y)=x^2+y^2 \tag{2.13}$$

「$(x,y)=(a,b)$ での、x の偏微係数を考える。……あ、偏微係数ってのは具体的な偏微分の値……というか」
「微分って微分係数を関数にしたものだったよね。同じように考えればいいのかな……えっと、定義通り考えればいいんだよね？」

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((a+h)^2+b^2)-(a^2+b^2)}{h}=2a \tag{2.14}$$

「こうかな」
「うん。正解、今回は一般的に $\partial f/\partial x=2x$ となるけど……大事なのは $y=b$ という定数で固定して、x に関して微分したということ。……ということは、この $f(x,y)$ は 2 変数関数じゃなくて、1 変数関数 $f(x,b)$ と考えられる」
「……。……！　ああ！　そうだね！　1 変数として考えればいいのか！　動かす変数を 1 つだけにすれば、1 変数の時の微分をそのまま拡張できる！」
　変数が 2 つだから扱いにくい。ということは、片方を固定しちゃえば、1 変数として扱うことができる！　単純なことなのだ。
「そう。グラフを書くとしたら $z=f(x,y)$ とすればいい。そうすると $y=b$ は平面で……その平面上の曲線を考えていることになる」
　あかりは黒板に、立体的にグラフを描く。原点を通る軸について対称な、二次関数をぐるっと回した図形だ。
「そうだね！　y が固定されれば x の 2 次関数、x が固定されれば y の 2 次関数！　それ

で微分をしてるだけなのか！」
「そう。大事なのは微分の方向が違うということ。$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ というのは、『点 (x, y) における x 方向の微分』ということになる」
「あ！　そうだね。y 方向には微分をしないってことか！　ただ x 方向にだけ微分をする。そっか……向きが重要なのかぁ」

2.3　多変数ベクトル関数の微分

「さて、これを多変数ベクトルに変える。これも同じように、多変数ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(u, v)$ を考える。この時の u 方向への偏微分はこう定義される」

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}(u, v) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{F}(u+h, v) - \boldsymbol{F}(u, v)}{h} \tag{2.15}$$

「偏微分ってのがさっきと違うところなんだよね……ん？　でもこれってどういう意味があるんだろ」
「意味？」
「いや、偏微分が、他の変数を固定したときにできる曲線の傾きっぽかったから……接線に平行なベクトル？」
「接ベクトル。そう。あおいの言う通り、この $\boldsymbol{F}(u, v)$ が曲面を表しているなら、この偏微分は接ベクトルを表している」
　私は少し黙って考える。$\boldsymbol{F}(u, v)$ と、u を少しずらした $\boldsymbol{F}(u+h, v)$ の場所を考える。少ししか u をずらしていないということは、曲面上の点も少ししか動いていないということだろう。ということは……$\boldsymbol{F}(u+h, v) - \boldsymbol{F}(u, v)$ というのは 0 に近づいて行くけれど、面に対して平行なベクトルになりそうだ。これを $1/h$ で割っていることから、0 でないベクトルになる……と考えられる。向きは変わらない。
　曲面の上に、それに接するベクトルができているような気がする。
　もっと考えよう。$\boldsymbol{F}(u, v)$ の v を固定して、u を動かす。そうすると……曲面の上に曲線ができるはずだ。となると……$\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}$ はその曲線に接するようなベクトルになるはずだ！
「あ！　そっか！　$\boldsymbol{r}(t)$ の微分って速度ベクトルになって、それって軌道の接ベクトルになるじゃん！　同じことか！」
「……そうだね。曲面を曲線で切り取ったものになる。ただあおい、これは他にも使い方がある」
「え？」
「ベクトル場を考える時だよ。電場や磁場は、位置 $\boldsymbol{r}$ からベクトルへの関数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と考え

ることができる。……ここで、x 方向、y 方向だけの微分を考えることが必要になる」

電場や磁場を考える。場所によってベクトルの強さが違う……それをベクトル関数として考えるのか。ベクトル関数というか、ベクトルを変数として、ベクトルを返す関数……えっと、どう書けるんだ？

「あー……$\boldsymbol{E}(x,y,z)$ みたいに書けるのか。……となると、接ベクトルっては言いにくいね。曲面として考えるのは、パラメーターが 2 つの時だったから。うーん。これにどんな意味があるのかな」

「……意味、か」

あかりは考える。私も考える。

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ があるとして……それを微分する。つまりある方向へのベクトルの変化を考える。つまりベクトル場の変化を表している。……でも x 方向への変化ってなんだ？

「Maxwell 方程式には確か、時間微分があったね。そうすると、$\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ は電場の時間変化になるはず」

「あ、そっか！　時間変化か！　x,y,z の空間 3 成分だけじゃなくて、時間 t も変数になっているのか！　$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ みたいに！　4 変数のベクトル場なんだ！」

「……そうだね。そういえばそうだ」

2.4　微分の連鎖律

「さて、これまで x,y,z の座標系だけで考えたけど、この座標を変換したいと考えることがあるよね」

「……？　あるの？」

「少なくとも、極座標で考えることは多いはず。そういう時に、微分を変換したほうが解析しやすい」

「……x 方向の微分を、r 方向の微分に考え直す、みたいなこと？」

「そう。まずは今までと同じように、1 変数の時を考える。1 変数の微分は、合成関数の微分という形で現れる」

$$\frac{df}{dt}(x(t)) = \frac{df}{dx}(x(t))\frac{dx}{dt}(t) \tag{2.16}$$

「これは授業でもやったね！　dx どうしが約分のように扱えるって！」

「ライプニッツの記法だね。証明は教科書を見ればいいから省略するよ。あおい、この式の意味は大丈夫？」

「ん、x ってパラメーターから、t っていうパラメーターに変更したんだよね？　最終的には全体が t の関数になってるし」

「そうだね。じゃあこれを、多変数にも応用していく。多変数の場合、微分ではなく偏微分を考えることになる。……まずは 2 変数の時でやろう。関数 $f(x,y)$ について考えるよ。変数を (x,y) から u,v に変更することを考える。この時、x と y は (u,v) の関数になる。だから、f を u で偏微分すると」

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x(u,v),y(u,v)) \tag{2.17}$$

「っていう式になるはず。これを、x,y の偏微分で書き直す」

「……どうするんだろう。1 変数だったら分数みたいに扱えたけど、2 変数だと……」

「こういう時は定義に戻って計算する」

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x(u+h,v),y(u+h,v))-f(x(u,v),y(u,v))}{h} \tag{2.18}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x(u+h,v),y(u+h,v))-f(x(u,v),y(u+h,v))+f(x(u,v),y(u+h,v))-f(x(u,v),y(u,v))}{h} \tag{2.19}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x(u+h,v),y(u+h,v))-f(x(u,v),y(u+h,v))}{x(u+h,v)-x(u,v)}\frac{x(u+h,v)-x(u,v)}{h} \tag{2.20}$$

$$+\frac{f(x(u,v),y(u+h,v))-f(x(u,v),y(u,v))}{y(u+h,v)-y(u,v)}\frac{y(u+h,v)-y(u,v)}{h} \tag{2.21}$$

「……ずいぶん長くなったけど、式の変形は大丈夫？」

「うん。まあ。長いね……」

「もう少しの辛抱。この式を見てみると、第 1 項の始めの分数。これは $x(u,v)$ が $x(u+h,v)$ になったときの f の変化と見える。まあ y の方も h だけずれてるけど……この分数の中では y は変化していない。片方が変化して、もう片方が変化しない。これはつまり、偏微分が使えるということ」

「……あ、そっか！　x だけ変わってるんだ！　あと第 2 項！　第 2 項の初めの分数は y だけが変化してる！　こっちは y についての偏微分にすればいいんだ！」

「その通り。式をちゃんと書くとこうなる」

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x(u,v),y(u,v))=\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \tag{2.22}$$

「うへぇ。めっちゃ複雑……」

「そう？　分数のように表せていいと思うけど。……でも、実際に計算するときは大変か。少なくとも $f(x,y),x(u,v),y(u,v)$ の 3 つの関数が具体的にないといけないから」

「あ、そっか……でも、電磁気で使うんでしょ？　ならやるしかないね……」

大変だけれど、やらなければならないのなら仕方がない。やってやろうじゃないか。ただ計算が大変なだけだ。
「……電磁気学で使うのは場の関数だから、x, y, z……に加えて、時間 t も変数になる。4 つの成分があるよ」
「……え、あ、そっか。……ぬぅぅん。でもやり方わかってるからいいか……」
「多分、そんな複雑なのは出ないと思う……当分は」

2.5　全微分

「積分の変数変換をするときに、全微分というものを知っておいたら便利になることがよくある。あおい、これはどう解釈できる？」

$$dx = \frac{dx}{dt}dt \tag{2.23}$$

「え……？　えっと、x の微小変化は、速さかける微小時間……？　あっ、数学的に？　えっと……」
「いや、数学的にも同じようなもの。これを他変数関数の場合にも拡張する。u, v の関数 $x(u, v)$ の微小変化は」

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \tag{2.24}$$

「となる。あおい、これは大丈夫？」
「ん……確か偏微分って文字を 1 つだけ動かして、あとは全部固定する……u を動かして、v を固定すると、$dv = 0$ か。v の方も同じで、両方動かすと……$dudv$ に比例した部分が出るんじゃない？」
「確かにそう。だけれど du, dv が微小量で、微小量同士の積は無視できるものと考える」
「そうなんだ、だったら……他に何か出そうもないね。うん！　いいと思う」
「これはもっと拡張することができて、3 変数の場合……スカラー関数 $f(x, y, z)$ を考えるとこうなる」

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{2.25}$$

「この式を f の全微分という」
「うわ、だいぶ長いね」
「でも、これを使えば微分の連鎖律がちゃんと成り立っていることがわかるよ。2 変数関数 $f(x, y)$ を、別の文字 u, v に変換することを考える。この時、$x(u, v), y(u, v)$ のように書けるから」

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \tag{2.26}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv \tag{2.27}$$

「この式と、この式を比較する」

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv \tag{2.28}$$

「……以上より、微分の連鎖律がわかる。どう？」

「うひっ……こんなたくさん計算するの？　ちょっと、大変じゃない……？」

「……まあ、ちょっと大変。実際に計算するとなると、いちいちこの微分を計算しないといけないわけだからね。できるだけ計算を軽くするには工夫が必要だね」