あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 2 ベクトル解析

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

3　ベクトル微分

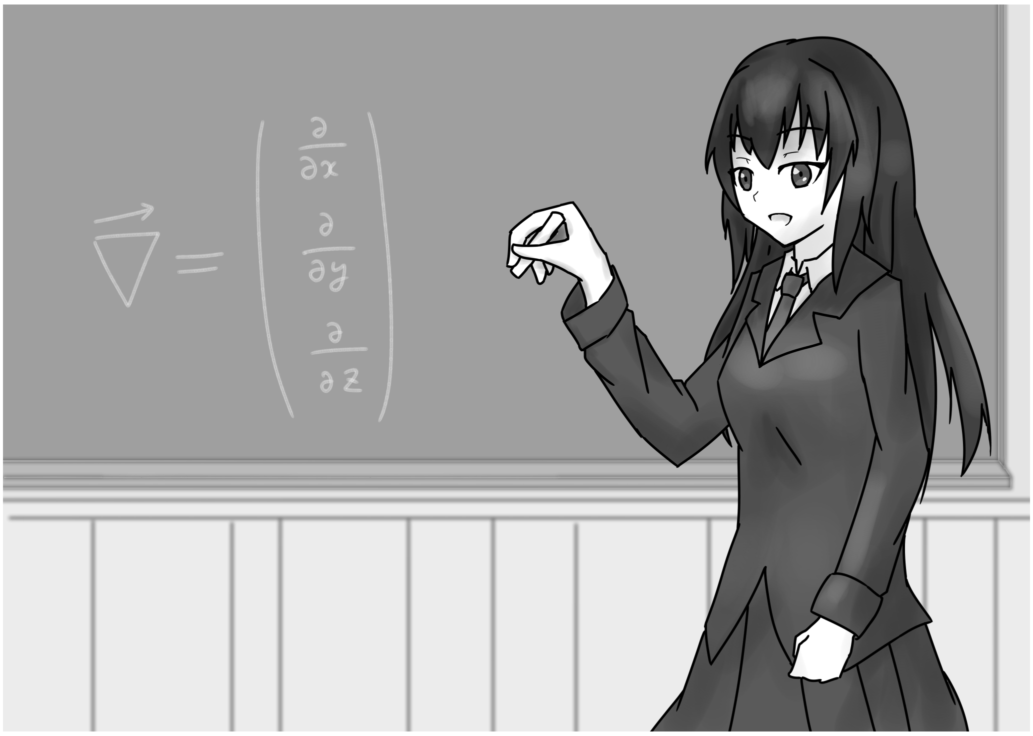
3.1　ナブラの登場

「……あれ、あかりがいない」
　今日もホームルームが終わって、教室を飛び出すように物理室まで来た。いつもならあかりが先に来ているはずだけれど、今日はまだ来ていないようだ。早く来すぎてしまった……。私はカバンを机に置いて、椅子に座り、ノートを取り出す。あかりが来る前に、昨日と一昨日の復習をしておこう。
　まず、ベクトルの外積とベクトルを使った曲線と曲面の表示。そしてベクトルを関数として考えた時に、微分するということ。うん。今の所大丈夫だ。
「でも……」
　これからも大丈夫とは限らない。ベクトル。微分。あとは積分か？　でも積分は数学の授業で勉強している最中だ。ベクトルに拡張して、正しい理解が得られるかはわからない。
「……わからない」
　今回の『わからない』は……『自信がない』だ。曖昧か複雑か、知らないか……ああ、これはそのどれでもないのか。これに『自信がない』を追加して、4 つの……
「いや……」
　違う。『自信がない』は『わからない』ではない。まず立ち向かってみる。わからない

のかどうかは、立ち向かってから決めればいい。
「……そうだ。最終目標」
　私はノートのページをもっと戻していく。マクスウェル方程式だ。マクスウェル方程式……これを理解するために、あかりは私にベクトル解析を教えてくれているのだ。ならば……これがわかるように、というのがあかりの目標でもあるはずだ。
「…………」
　まだ、わからない記号がある。この逆三角形。これが分からない……知らないと言う意味で、分からない。でも、それ以外は、わかる。どうやらこれはベクトルの方程式のようだということも。
　私がもう一度、マクスウェル方程式を書いていると、物理室の扉が開いた。
「あ……あおい」
「おっ、あかり！　やっほー」
　あかりはほっとしたような表情で物理室に入ってきた。
「遅れたっぽいけど、何かあったの？」
「先生に少し頼まれて……ごめんね？」
「いやいいよ。ちょうど復習もできたし。それで！　今日はなにやるの！？」
　あかりは少し微笑む。
「今日は、ナブラについて話そうと思ってる」
「ナブラ？」
　教壇に登り、あかりはチョークを手に取る。そして、私がついさっきまで書いていた記号を描いた。

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

「ナブラ……微分演算子を、ベクトルのように並べたもの」
　私の目は黒板に釘付けとなった。



3.2　勾配

「この三角ってそういう意味だったんだ！」

　私はそう叫ばずにはいられなかった。

「そう。マクスウェル方程式もそれで書かれているよね……これは、ベクトルの微分作用素。後ろの文字に対して、微分をする……ベクトルとしての微分をするってこと」

「ベクトルとしての微分……？　昨日の話と何が違うの？」

「昨日のは、『ベクトルを関数と見て』『そのベクトルを微分する』ってこと。今日やるのは『ある対象を』『微分するベクトル』の話」

「う、ん？」

「……まず勾配を考えよう。ある場の関数 $f(\boldsymbol{r}) = f(x, y, z)$ があるとするよ。それに、このナブラを左から作用させる」

$$\nabla f(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{r}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

「……あ！　そういうことか！　関数 f を微分するっていうベクトルだ！　あぁ……確かに、『微分するベクトル』だねこれは！」
「そういうこと。具体的な例でやってみようか。$f(\boldsymbol{r}) = xy$ ってのを考えてみよう。すると、」

$$\nabla f = (y, x, 0) \tag{3.3}$$

「となる。これは x と y の関数と見れるから、グラフとして書いてみよう。するとどうなる？」
「え……？　こんな感じ？」

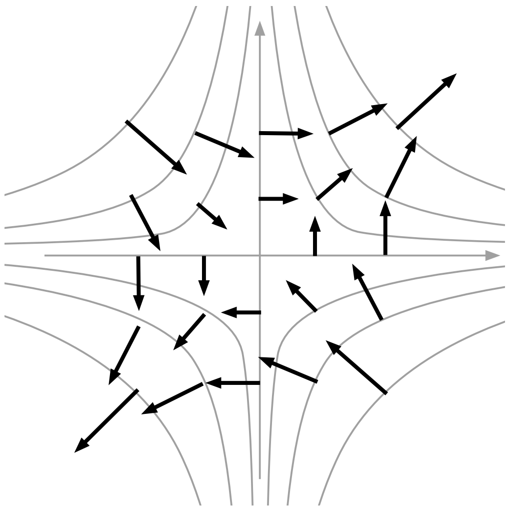


図１　$f(\boldsymbol{r}) = xy$ の等高線と勾配

　これはただのベクトルでなく、ベクトル場だ。だから、空間の各点各点にベクトルを生やさなければいけない……xy 平面だけに限れば、こうなるだろう。
「そう。それに、$f =$ 一定 のライン……等高線を書いていって」
「こう……ん！？　あっ……『勾配』！？」
「そう。勾配」
　私は……びっくりしていた。まさか、勾配……本当に、傾きになっているなんて。
「勾配って、一番急な方向を持ったベクトルなんだ！　大きさは……文字どおり傾きになるのかな！？」
「なる。……ちゃんと議論するには方向微分ってものを考えないといけないけど」
「おおおーっ！　これって、場に対する傾きなわけだよね！　電磁気ではどう使うのかな？」
「クーロンの法則に使える。$f(\boldsymbol{r}) = 1/|\boldsymbol{r}|$ の勾配を取ればいい。……少し計算は大変だけ

ど、計算したら、」

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{3.4}$$

「こうなる。大きさだけ考えれば $1/r^2$……これはちょうど、電位と電場の関係と同じになる」

「……！！　あーっ！　あーっ！　ああーっ！！」

「……どうしたのあおい」

「いや！　……っ！　すごいって思って……えっ。じゃあこれ、本当なんだ！　『電位の傾きが電場』だって！」

　頭の中でピースがはまる。右脳と左脳がシンクロしてくる。心と脳が一つになる。ああ、そうか……『電位の傾きは、電場』なんだ。心と頭で、理解した。

3.3　発散

「……続きいっていい？」

「あ……うん。ごめん、びっくりしちゃって」

「感慨に浸る気持ち……わからなくはないかな。これで場の解析が進む。f がどの方向に一番大きくなっていってるのかがわかるってのは、とても扱いやすい。……ただ、ナブラには他の使い道もある」

「他の使い道？」

「ベクトルだから、他のベクトルと内積を取ることができる。と言っても、ナブラは右側に場の量が入らないといけないから、ベクトル場に作用させることになる。ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ に対して、このような量を定義する。」

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\boldsymbol{r}) \tag{3.5}$$

「で、この量には名前が付いていて……」

「待って！　私がこの名前を当てる！」

「……そう？　まあ、いいけど……」

「えっと……その F_x とか F_y とかっていうのは $\boldsymbol{F}$ の x 成分とか y 成分ってことでいいんだよね？」

「うん。それぞれ場の関数になるから、$F_x(\boldsymbol{r}), F_y(\boldsymbol{r})$……みたいになっているよ」

「ん……ちょっと待って」

　そうだ。結局、微分は傾きなのだ。だから、ある一点でどうなっているかを考えればい

い。……今回、ベクトルからスカラーを導き出している。これはどういうことか？　あかりはルーズリーフに目を落としている。待ってくれているようだ。

「……えっと」

プラスかマイナスかだけでも判断しておきたい。例えば、このすべての項がプラスであるとすると……その点では F_x が x 方向に増える。F_y が y 方向に増える。F_z が z 方向に増える。となるとベクトル場としてはこんな風な、描きにくいな。平面で考えようか……あいや、そうだ。x 方向のみのベクトル場を考えよう。そうすれば単純に $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \partial F_x/\partial x$ になる。この x 方向の微分、微分……微分ってのは傾きだから……。

これを x 方向だけでなく、すべての方向で足し合わせる。どういうことだろう。x, y, z。この 3 つの軸の方向に、どのくらいそれぞれの成分が増えるのか、ということを考えているわけだ。変化量の足しあわせ。変化量を全部足す……。

「……全変化量？」

「あー……なるほど、違う。これは発散という名前が付いている」

「発散……？　どういうこと？」

「これは少しばかり考える必要があって……ある点を中心にして、$\Delta x\Delta y\Delta z$ の直方体を考える。これを発散の量にかけてやる」

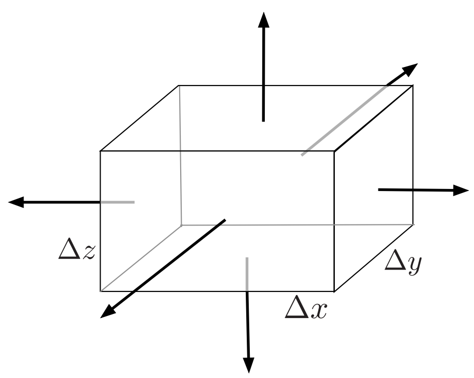


図 2　微小の直方体から出て行く量：発散

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\boldsymbol{r})\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\boldsymbol{r})\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\boldsymbol{r})\Delta x\Delta y\Delta z \quad (3.6)$$

「このうち、x 方向だけを考える。すると、第 1 項は何を意味している？」

「Δx……あ、傾きか。ってことは……あっ。もしかしてこう！？」

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \approx \left(F_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - F_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\right)\Delta y\Delta z \quad (3.7)$$

「だいたいそう。細かい議論は省くけど……Δx が非常に小さかったら、そう考えていい。さて、これって 2 つの項があるよね？　もし、それぞれの項がプラスになるとすれば、F_x

はどうなってる？」

「えっと、どっちもプラスだから……$F_x(x+\Delta x/2,y,z)$ がプラスで、$F_x(x+\Delta x/2,y,z)$ がマイナス……？　えっと、それって……」

「ベクトルの向きを考える」

「すると……ああ！　この直方体の、外側に向かってるんだ！」

「その通り、他の項も同じように考えることができる」

「そうだよね！　すごい！　確かにこれは発散だ！」

3.4　回転

「あともう一つ……回転ってのがある」

「あっ、名前言っちゃった」

「さっきの考え方を応用すればこっちの意味も理解できると思う。回転は、ベクトル場にナブラを……外積の形でかけたもの」

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

「ぬほぉ！　やっぱり外積は定義が複雑だね……」

「仕方がない。けれど、マクスウェル方程式には必要」

「ん……あ、本当だ！　ナブラとの外積がある！　ん、これが回転を表しているんだよね？　なんか……うまく解釈できそう」

「このベクトルが回転を表すことを解釈していく。まず……そもそも回転というのは、軸がないといけないよね」

「ん、そうだね。コマみたいな」

「そう。そして、軸を決めても『回転する速さ』はまた別なわけだ。これを、ベクトルで表す」

「……つまり、ベクトルの方向で軸を決めて……そして、回転の勢いをベクトルの大きさで考えるってこと？」

「その通り。数学ではある回転がある時に、そう回した時に右ネジが進む方向で考える。これは物理からの輸入だけど……。それを踏まえて考える」

「回したときに右ネジが進むってのは、えっと……時計の周りを考えたら……奥向きにベ

クトルを考えるってこと？」
「そう。力のモーメントとか、回転運動もそれで書くことができる。反時計回りはベクトルの向きが逆になる」
「うん、回転をベクトルで表せるってことはわかった。……それで、これはどうやって解釈するの？」
「このベクトルの z 成分だけを見る。xy 平面だけを考える。そして……$\Delta x\Delta y$ の長方形で区切ったものを考える」

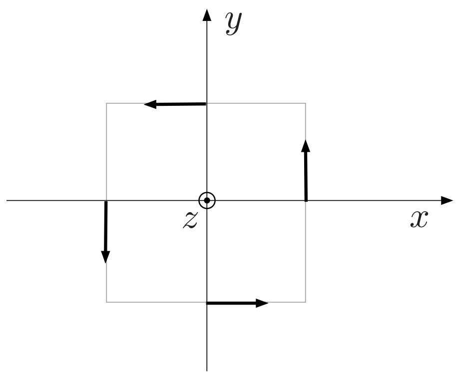


図 3　z 軸周りの微小長方形を回る量：回転

「これを z 成分にかければいいのかな？」

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\approx\left(F_y\left(x+\frac{\Delta x}{2},y\right)-F_y\left(x-\frac{\Delta x}{2},y\right)\right)\Delta y \tag{3.9}$$

$$-\left(F_x\left(x,y+\frac{\Delta y}{2}\right)-F_x\left(x,y-\frac{\Delta y}{2}\right)\right)\Delta x \tag{3.10}$$

「そう。何かわかることはない？」
「全部が正になるのはどんなときかってのを考えればいいんだよね？　えっと……あ。これ長方形のそれぞれの辺を表しているのか！　ん？　でも方向が……あ！　長方形に沿う方向なんだ！　あっ！　ぐるって回る方向になってる！　回転だ！」
　図を描いて考える。なるほど……1 つの点の周りをぐるっと回る。そんなベクトル場を考えているんだろう。
「その通り。そのベクトル場は x 軸から y 軸へ向かう方向へ回転する。この回転方向で右ネジは……z 軸方向に進む。だから、この値を z 成分に入れる」
「おおお！　すごい！　で、それがベクトルなんでしょ？　ベクトル場に対して、どんな方向に回転しているかがわかるんだ！　すごい！」

3.5　ラプラシアン

「さて、今まで、勾配・発散・回転とやってきたけれど、ベクトルやスカラーを行き来するものだった」

「あ、確かに。勾配はスカラーをベクトルにする。発散はベクトルをスカラーにする。回転は……ベクトルをベクトルにするね」

「まあ、意味を考えれば混乱することは無いんだけど……もう一つ、微分演算子を考えたい」

「お？　今度は何？」

「今度はスカラー場にもベクトル場にも使うことができる。いわばスカラー演算子なんだけど……ラプラシアンっていうもの」

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.11}$$

「ん……2 階微分なんだ。スカラー場が来たらそれの 2 階微分。そしてベクトル場が来たら……そのまま 2 階微分。あいや、2 階偏微分か」

「実はこれは、スカラー場に対してはこう書くことができる」

$$\triangle f = \nabla \cdot \nabla f \tag{3.12}$$

「ん……えーと、成分で考えると……あ、確かにそうだね」

「こういう意味で、$\triangle = \nabla \cdot \nabla$ と書くこともある。この書き方はスカラー場にしか適用できないことに気をつけてね」

「あ、うん。そっか。勾配ってスカラー場にしか作用できないからか」

「そう。具体的に書くとこうなる」

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.13}$$

「そして、ベクトル場にも適用することができる」

$$\triangle \boldsymbol{F} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial z^2} \tag{3.14}$$

「……どっちも場だよね。スカラー場とベクトル場。じゃないと偏微分できないから。何か具体例はない？」

「そうだね……$f = 1/r$ を考えてみると面白いんだよね。やってみる？」

「ん？　うん。えっと、$f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ ってことだから……」

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \tag{3.15}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{3.16}$$

$$=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3}{2}\frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{3.17}$$

「これを全部の偏微分で足せばいいから……」

$$\triangle\frac{1}{r}=-\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{3.18}$$

$$=0 \tag{3.19}$$

「……ん？　計算間違えた？」

「いや、合ってるよ。$1/r$ は 3 次元空間のラプラシアンを作用させると 0 になる性質を持つ。この性質を調和って言うんだけど……一般的に、$\triangle f=0$ となる関数 f は調和関数と呼ばれる」

「へぇ！　電位ってじゃあ、調和関数なんだ！　だってほら、どんな電位も、点電荷の作る電位の重ね合わせじゃん！」

「……そうだね。確かに」

3.6　ベクトル恒等式

「もう時間がそんなにないね……じゃあ、もう少しこのナブラについて見て、今日はおしまいにしよう」

「おお？　何をやるの？」

「さっきはスカラー場に対して、勾配の発散を考えた。けれどそれだけじゃなくて、他にもいろいろな組み合わせが考えられる。たとえば、こう」

$$\nabla\times\nabla f \tag{3.20}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{3.21}$$

「えーと……勾配の、回転？　それと、回転の発散……かな。これがどうかしたの？」

「証明は省くけど、実はこれ、計算した結果 0 になる。」

$$\nabla\times\nabla f=\boldsymbol{0} \tag{3.22}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}=0 \tag{3.23}$$

「えっ！？　なんで？」
「成分の計算をすればわかる。上の式は偏微分の順番を入れ替えていいということから。2つ目の式もそれを使って計算できる」
「へぇー……勾配の回転が 0 かぁ。確かに、ただばーっとなってるだけのベクトル場は……いや、なんでもない。なんかイメージがつかみきれなくて」
「回転の発散が 0 ってのは少しわかる気もするけど。ループしているものが発散してるとは思えないし」
「うぅうん……そのイメージもどうなのかなぁ。あとあかり、思ったんだけど、回転の回転、って考えられないの？」
「できるよ。結果的にこうなる」

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \triangle \boldsymbol{F} \tag{3.24}$$

「へぇ！　ラプラシアンになるんだ！　証明は成分を計算すればいいのかな？」
「まあ、それでいい。少し大変だけど、ノート 1 枚程度で済む。……というか、ベクトル場に対してはこの式の方がいいって解釈もあるか……」

$$\triangle \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{3.25}$$

「ん？　これは……スカラー場 f のラプラシアンが $\triangle f = \nabla \cdot \nabla f$ ってなってたのとの対比？」
「まあそのつもり。大した意味は今の所ないかな」
「ふむ？　了解。……へぇ。こんな風になるんだ」
「あと、もう少し考えないといけないのが、積の微分。公式を書くとこうなる」

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{3.26}$$
$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{F}) = f\nabla \cdot \boldsymbol{F} + (\nabla f) \cdot \boldsymbol{F} \tag{3.27}$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}(\nabla \times \boldsymbol{G}) \tag{3.28}$$

「最後の式だけやけに複雑だね……でも、基本的には積の微分になるんだ」
「他にも色々な公式がある。あと、言ってなかったけどベクトルの微分を考える時もこういう風な積の微分を考えることができる。自分で確かめておくのが一番」
「う、うん。わかった」
「……まあ、必要になったらやればいいのか。結局、通常の微分のライプニッツ則……積の微分の法則に帰着させればいいから」