あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 2 ベクトル解析

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

4　ベクトルの積分定理

4.1　1 変数関数の積分

「やっほーあかり！」

「やっほ。今日はだいぶ遅れてたけど、何かあったの？」

「んー、まあないことはなかったけど、大丈夫だよ。私には関係のないことだったし」

「？　まあいいや、じゃあ、今日も始めるかな。今日は積分について考える」

「おお！　積分！　ついに！」

「まずは 1 変数の積分を考える。授業でやったようなもの。まずあおい、積分をするには何が必要？」

「え？　……関数？」

「そう。まず一つ、関数が必要。そしてもう一つ必要なんだけど」

「もう一つ……？」

　例えば……x を積分すれば $x^2/2$ になるとかはわかる。しかし、他に何が必要か？

「もう一つは、積分範囲。この 2 つがあれば積分ができる」

「え？　……あ、定積分の話？」

「あ、うん。そのつもりだった。ああ、不定積分だったら確かに積分範囲は明示する必要はないか……でも、不定積分の結果得られる原始関数は何の関数かって言ったら、範囲を値に変える関数だから」

「あー。そっか。積分定数って、積分範囲の端をどこに固定するかってことか……。これからは、関数と積分範囲がわかっている前提で積分を考えていくってこと？」
「そう。高校では１つの変数の関数に対してしか積分を扱わない。だから積分範囲も１次元。これを高次元に変えていく」
「高次元……っていうと」
「曲面や空間上で積分を行う。積分範囲はその曲面や空間領域。そして被積分関数はその上の関数……場だね」
「！！　場の積分！？　場を積分するってことか！　そんなことできるの！？」
「できる。１変数の積分を、拡張していく」
　私は驚いていた。積分……というと、私たち高校生にとっては非常に『難しい』ものだ。それだけで手一杯になる。高校数学では一番難しいところだろう。しかし、ベクトル解析では、そんなものはただの準備に過ぎないのだ。本当は高次元の計算をしたい。その準備段階として、高校数学があるのだ。
「まずは１変数の積分の復習をする。区間 $[a, b]$ 上で関数 $f(x)$ を積分する。定積分だ。それはこう書ける」

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

「うん。そうだね。インテグラルと dx を挟む！」
「……えっと、別に挟む必要はないんだよね。インテグラルと dx は」
「えっ、そうなの？」
「先生はいつもそう言ってるけど……実際は挟む必要はない。それは定義を考えればわかる。積分って、面積を計算するものだったよね？　やり方としては同じことをやっていく」
「教科書に載ってる説明か。頑張って読まないとわかんないよねここ」
「そうだね。……まず、積分範囲を分割していく。$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \cdots, [a_{n-1}, a_n]$ と、n 個の区間に分割する。ここで $a = a_0, b = a_n$ としたよ。ここで、n はとても大きい整数とする」
「$a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ ってことだよね？　こう、関数を縦にスライスしていくような……」

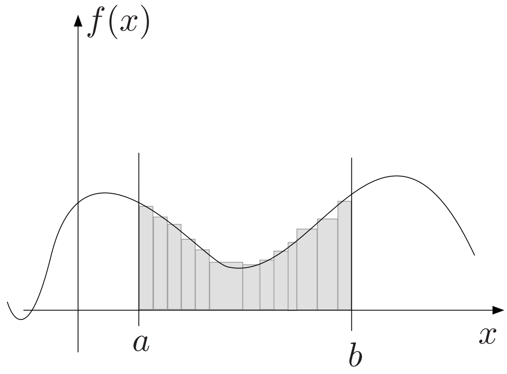

図 1　面積を Riemann 和の極限として考える：Riemann 積分

「そう。そのスライスされた部分を長方形として考える。……k 番目の区間 $[a_{k-1}, a_k]$ の中にある適当な実数 ξ_k を選ぶ。それぞれの区間から 1 つずつ。そうしたら $\xi_0, \cdots, \xi_n$ という順番が出てくる。ここまではいい？」

「うん。ここまではついてこれてる。スライスしたほっそい中からひとつ選んでくるんでしょ？」

「そう。そして、今まで定義したものを使って……Riemann 和というものを定義する。定義はこれ」

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(a_k - a_{k-1}) \tag{4.2}$$

「解説する。総和記号の右側は $f(\xi_k)$ と $a_k - a_{k-1}$ の積になっている。$a_k - a_{k-1}$ は区間 $[a_{k-1}, a_k]$ の幅になっている。そして、$f(\xi_k)$ はグラフ上で考えると、スライスした領域の高さになると考えられる」

「うん！　その積ってことは、スライスした部分の面積を計算してるってことだよね？　そして、それらを全部足す！　そうすると面積になるってわけだ！」

「……まあ確かに、n が十分大きくて、ある程度適切に分割されていたら Riemann 和を擬似的に面積と考えてもいいかもしれない。でも、Riemann 和はまだ積分じゃない。これを積分にするには、$n \to \infty$ の極限を取らないといけない」

「n って、確か分割数だっけ……？　ってことは、無限に分割していく、ってこと？」

「そうなるね。ただ、分割した時にできる区間の幅すべてが、無限に小さくならないといけない。……数学的にはもっと言葉が必要だけど、大丈夫？」

「んー。気にはなるけど、大丈夫。要はちゃんとスライスして、ってことでしょ？　……あっ待って。分割を無限に細かくしていったら、ξ_k の数が足りなくならない？」

「分割を細かくしていくごとに、ξ_k をまた取り直す。どんなに細かい分割をしても、それ

に近づいていく値……Riemann 和の極限値を、定積分という」

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(a_k - a_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx \tag{4.3}$$

「どんなに細かい分割をしても、近づいていく……分割を細かくしていく方法にはいろいろあるよね？　その、どんな方法に対しても、ある値に近づいていくってこと？」

「そう。区間を半分に区切っていく方法や、3 分の 1 の幅で区切っていく方法……他にもそれが入り混じった方法はあるけれど、どんな方法で分割を細かくしても、結局その値になるもの。それを定積分と呼ぶ」

「うーん……それって、積分が存在しない時もある？　分割方法によって違っちゃう、みたいな……」

「ある。でも物理ではきっと使わない。……それで、この $a_k - a_{k_1}$ を見て欲しいんだけど」

「ん？」

「これって、x の切り取る長さ……Δx と書いても支障は無いよね？」

「……あっ、それって dx と対応させようとしてる！？　確かに！　$f(\xi_k)$ かける Δx！　というか Δx_k！　あ、そっか！　$f(x)dx$ って、$f(x)$ と dx の掛け算なんだ！　だったら順番を入れ替えても問題は無いね！」

4.2　1 変数ベクトル関数の積分

「じゃあこれをまず……ベクトル関数に拡張する。と言ってもそれほど変わったことはしない。要は、Riemann 和の極限として考えればいいんだから」

「えっと……1 変数で、$\boldsymbol{F}(t)$ ってやればいいの？　じゃあ……こう？」

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}(\tau_k)\Delta t_k \tag{4.4}$$

「ん、そんな感じ。$[a, b]$ を $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \cdots, [a_{n-1}, a_n]$ に分割して、それぞれの中から τ_k を取り出す。$\Delta t_k = a_k - a_{k-1}$ として、確かに Riemann 和になっている」

「合ってる？　よかった！　……でも、これって計算できるの？」

「できる。……積分を和の拡張と考えれば、ベクトル同士の和で考えることができる」

「あっ！　そっか！　それぞれの成分の和で考えればいいのか！」

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \boldsymbol{F}(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}(\tau_k)\Delta t_k && (4.5)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} F_x(\tau_k)\\ F_y(\tau_k)\\ F_z(\tau_k)\end{pmatrix}\Delta t_k && (4.6)\\
&= \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F_x(\tau_k)\Delta t_k\\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F_y(\tau_k)\Delta t_k\\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F_z(\tau_k)\Delta t_k\end{pmatrix} && (4.7)
\end{aligned}
$$

「成分の中に全部入れこんじゃったけど、いいの？」

「いい。それぞれの積分がちゃんと定まっていれば。結局、それぞれの成分を積分すればいい」

$$
\int_a^b \boldsymbol{F}(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b F_x(t)dt\\ \int_a^b F_y(t)dt\\ \int_a^b F_z(t)dt\end{pmatrix} \tag{4.8}
$$

「おおおお！　そっか！　積分は和の拡張！　積分は和の拡張！　そう考えればなんでも積分できそうな気がしてきた！」

「……積分の計算ができるか、という意味ではそれぞれの成分が計算できないと無理。でもこれで計算ができる」

「いいねー……ん？　ちょっと待って。これ、速さ……いや、速度を積分したら……変位になる？」

「ん……なるよ。どうかした？」

「あーっ！　あーっ！！　そうだこれだ！　いやさ、力学やった時さ、速さを積分して変位にしてたじゃん！　ほら、微分の積分は元の関数！」

「微積分の基本定理、ね。確かに、速度は変位の微分だから、ベクトルの微分と組み合わ

せて、変位を考えることはできる」

$$\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(0)=\begin{pmatrix} x(t)-x(0) \\ y(t)-y(0) \\ z(t)-z(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \int_0^t v_x(t')dt' \\ \int_0^t v_y(t')dt' \\ \int_0^t v_z(t')dt' \end{pmatrix}=\int_0^t \begin{pmatrix} v_x(t') \\ v_y(t') \\ v_z(t') \end{pmatrix} dt'=\int_0^t \boldsymbol{v}(t')dt' \tag{4.9}$$

「ああーっ！　そういうことか！　速度を微小時間で足し合わせていったら変位になる！　そういうことだったんだ！」

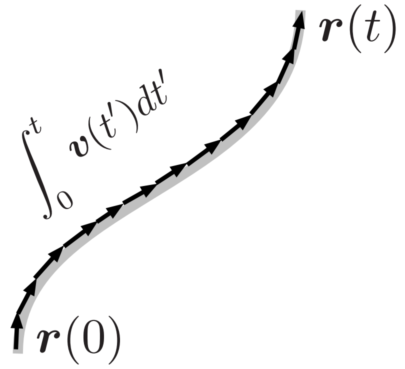

図 2　変位は速度を積分すれば求めることができる。

「……あおいの言ってる『そういうこと』ってのが何かわからないけど、まあ、そういうこと」

4.3　線積分

「さっきのは単に t でパラメーターづけされたベクトル関数について積分を行ってきた。これから、その範囲を拡大していく」
「範囲って……積分範囲？　そういえば、積分範囲を曲面とか、空間領域にするって言ってた！」
「そう。さっきまでは $[a, b]$ という 1 次元の区切られた範囲についてだけ考えていた。これからはその範囲を拡張していく。まずは、空間の中の曲線の上で積分することを考える」
「……？　どういうこと？」
「『曲線に沿って積分する』ということ。……曲線を媒介変数表示すると、t のベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ で表すことができたよね」
「うん……それの軌跡の上で積分するってこと？　そんなことできるの？」

「できる。……要は、パラメーター t の積分にしてしまえばいい。あおい、微小時間 dt の間に、$\boldsymbol{r}(t)$ はどのくらい変化する？」

「えっ？　えっと、速さと dt の積だから……$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$？」

「その通り。じゃあ、dt だけ時間が経った時の $\boldsymbol{r}(t)$ が進んだ長さは？」

「長さ……ってことは絶対値をつければいいんだよね？　速度ベクトルに絶対値をつけたものに、dt をかけたもの！」

「そう。というわけで、曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{r}(t))$……それの積分をこう考える」

$$\int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right| dt \tag{4.10}$$

「今回、曲線のパラメーターは $[a, b]$ にした。こうして、曲線の上の積分ができた。この積分を線積分という」

「……？　なんでこうしたの？　確かに、スカラー関数を積分した結果スカラーになってるけど……」

「なんで、って言うのは？」

「いや、この $|d\boldsymbol{r}/dt|$ のところって必要なのかな。$f(\boldsymbol{r}(t))$ だけを積分すれば……こうしても、スカラーの積分になるでしょ？」

$$\int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\, dt \tag{4.11}$$

「まあ確かに。ただ、これは線積分とは言わない」

「ん……じゃあ、この $|d\boldsymbol{r}/dt|$ には何か意味があるの？」

「ある。……この dt だけど、別にパラメーターを t にしなくてもいいんだ。同じ曲線を表すことができれば、どうでもいい。例えば円を表す時、パラメーターを θ として、$0 \le \theta < 2\pi$ で考えるのが普通で自然。でも、こうすることもできる。$t = 2\theta$ として、$0 \le t < \pi$ で考えたり。そうした場合、あおいの考えたやり方では違う結果が得られることになる。例えば、$f(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|^2$ だったら、」

$$\int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{r}(\theta))d\theta = \int_0^{2\pi} |\cos^2\theta + \sin^2\theta| d\theta = 2\pi \tag{4.12}$$

$$\int_0^{\pi} f(\boldsymbol{r}(t))dt = \int_0^{\pi} |\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2)| dt = \pi \tag{4.13}$$

「あ、そっか $dt = 2d\theta$ だから、ちょうど 2 倍違うのか……あ、そっか、曲線のパラメーターのつけ方によって変わっちゃいけないんだ！　だから $|d\boldsymbol{r}/dt|$ をつけてるんだね！」

「そう。これをつければ、」

$$\int_0^{\pi} f(\boldsymbol{r}(t)) \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt = \int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{r}(t(\theta))) \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{r}(\theta)) \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta} \right| d\theta \tag{4.14}$$

「このように、変数によらない形になる。もっと言うなら、こうできる」

$$\int_C f(\boldsymbol{r}) \left| d\boldsymbol{r} \right| \tag{4.15}$$

「おぉー！　……絶対値になってるけど、約分できるの？」
「今回は $dt/d\theta$ が正だから大丈夫。負だったら絶対値をつけるときにマイナスが出てくる。けれどそのマイナスは積分範囲の上下を入れ替えて、結局増加する方向にパラメーターづけをすることになる。だから大丈夫」
「ふぅん……ん？　ちょっと待ってあかり。$f = 1$ の時ってじゃあ……曲線の長さ？」
「ああ、その通りになる。この時は……こうなる」

$$\int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \tag{4.16}$$

「あっ！？　待ってこれどこかで見たことある！　……ああっ！　教科書！　曲線の長さとしてこう書いてある！」

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \tag{4.17}$$

「2 次元の曲線だね。$|d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ と考えることもできる。これには微小線素という名前がついている」

4.4　面積分

「じゃあ、次は面で積分することを考える。……これは単純に考えることは難しい。さっきの Riemann 和から変える必要がある。2 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ で表される曲面で微小面積を考える必要がある」
「あー。幅じゃなくて、面積にしないといけないんでしょ？　だったら……こう？ $f(x, y)$ として」

$$\sum_{k,l}^{m,n} f(u_k', v_k')(u_k - u_{k-1})(v_l - v_{l-1}) \tag{4.18}$$

「k や l って添字で面をこう、メッシュのように区切る。m 分割と n 分割として……Riemann 和はこうなるのかな？」

「……大枠はあってる。ただ、それって区切った面積を $(u_k - u_{k-1})(v_l - v_{l-1})$ とできないといけない。一般的な曲面を考えるには、少しばかり考える必要がある」
「あー……そっか。これ、『長方形で区切る』として考えてるんだ。普通の曲面って、パラメーターづけが直交しているとは限らないんだ。……じゃあ、どうするの？」
「微小な面積素で考える。微小なら u 方向と v 方向に沿う接ベクトルの作る平行四辺形の面積と考えられる。パラメーターをその幅だけ動かすことを考えると、曲面上のベクトルはそれぞれ u 方向と v 方向でこう変化するよね」

$$\boldsymbol{r}(u_k, v'_k) - \boldsymbol{r}(u_{k-1}, v'_k) \tag{4.19}$$
$$\boldsymbol{r}(u'_k, v_k) - \boldsymbol{r}(u'_k, v_{k-1}) \tag{4.20}$$

「ん……確かに。こう、曲面を区切った格子の……端と端をつなぐベクトルになるわけだ」

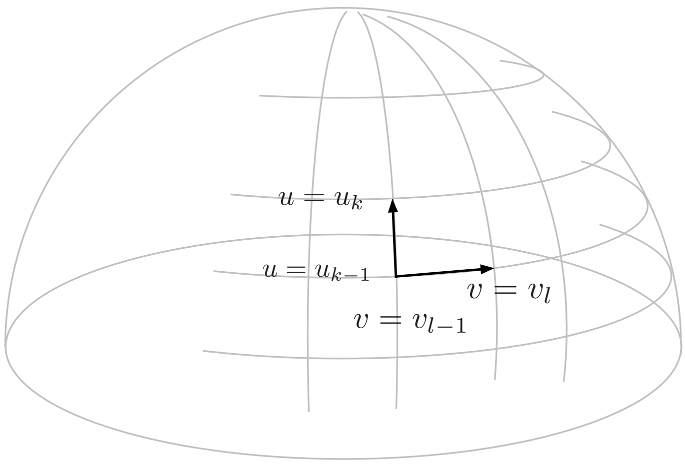

図 3　曲面を 2 つのパラメーターで表した時の微小面積について

「そう。問題は、この 2 つのベクトルが作る面積。……あおい、この 2 つのベクトルの張る平行四辺形の面積は？」
「え？　そんなのわか……あ。ああーっ！　ここで使うの！？　外積を！」
「そう。2 つのベクトルの張る平行四辺形の面積は、外積の絶対値で書ける。だから、リーマン和はこうなる」

$$\sum_{k,l}^{m,n} f(u'_k, v'_k)\left|(\boldsymbol{r}(u_k, v'_k) - \boldsymbol{r}(u_{k-1}, v'_k)) \times (\boldsymbol{r}(u'_k, v_k) - \boldsymbol{r}(u'_k, v_{k-1}))\right| \tag{4.21}$$

「……長いね」

「ここで、ベクトルでも近似を使う。微分を少し近似して、」

$$\sum_{k,l}^{m,n} f(u_k', v_k') \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_k', v_k') \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_k', v_k') \right| (u_k - u_{k-1})(v_l - v_{l-1}) \tag{4.22}$$

「ちょっと、全然短くなった感じがしないんだけど」

「そう？　確かに、変数を露わに書いているからね。さっきと同じように、k と l を無限大に飛ばして、$u_k - u_{k-1}$ を du に $v_k - v_{k-1}$ を dv にすれば、面積分の出来上がり」

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l}^{m,n} f(u_k', v_k') \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_k', v_k') \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_k', v_k') \right| (u_k - u_{k-1})(v_l - v_{l-1}) \tag{4.23}$$

$$= \int_S f(u, v) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u, v) \right| dudv \tag{4.24}$$

「……えーっ。信用できない。なんかすごく余計なことをしている気がする。変数変換に必要なのかもしれないけど……$|d\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}|$ って書いても、よく分からないし。あっ、方向が違うのか……」

「変数変換は少し大変だね。でも $f = 1$ となる関数を面積分してみるといいよ。そうだね……$\boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ で、$0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ で積分してみて」

「その範囲って、円だよね？　これが円の面積になるってこと？　……ちょっとやってみる。まず、それぞれの偏微分をとって、外積を計算する」

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

「で、その大きさだから、r になるのか。えっと……じゃあ積分していくね。これは r は r で、θ は θ で積分していけばいいのかな。えっと」

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr = 2\pi \times \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \tag{4.26}$$

「んあっ！　円の面積だ！」

「そう。$f = 1$ としたら、その領域 S の面積が出てくる。線積分の時と同様にね。このように、線積分や面積分の計算はその長さや面積に関数で『重み付け』をして行って、それを足すという演算になる。Riemann 和を取り扱ってね。さっきやらなかったけど、線積分の時も Riemann 和のことを考えるとすんなり定義できる」

4.5　ベクトル関数の線積分・面積分

「じゃあ次は体積の積分！？　体積積分？！」

「それもあるけど、スカラー 3 重積を使って Riemann 和を考えれば自然に定義できる。……次は、ベクトル場を積分することを考えるよ」

「おお！　ベクトル場か！　ん……でもさっきやらなかった？」

「あれはただ単にベクトルを足しただけ。パラメーターの範囲は考えているけど、図形的な、領域を考えているわけじゃない。今回考えるのは、ベクトル関数の線積分と、面積分」

「線積分と……って、今と同じようなことをすればいいの？　それだったら、被積分関数を置き換えるだけでいいのかな」

「いや、少し変える。こうする」

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt \tag{4.27}$$

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right) dudv \tag{4.28}$$

「あ、さっきまで考えてたのと少し違う……絶対値じゃなくて内積にするんだ。……ん？　それじゃあ、線積分や面積分での結果はスカラー？」

「そうだね。なぜ内積を取るかというと、『そのベクトル関数が、その図形とどんな関係になっているのか』という性質が現れるから。曲線だと『曲線とどのくらい同じ方向を向いているか』になるし、曲面だと『その曲面をどのくらい貫くか』という量を積分してる」

「あ、そっか。曲線の接ベクトルとの内積って、ベクトルがその点で『どのくらい曲線に沿ってるか』って量だし。曲面は……面積素がベクトルになるから……えっと、接ベクトルと、接ベクトルの外積……ああ！　曲面に垂直なベクトルになるんだ！　そっか！『どのくらい曲面に垂直か』……ふむ。その情報は嬉しいね！」

「実際の計算はどうするか大丈夫？」

「ん？　……ああ、えーっと。微分して、それとベクトル場の内積をとって、積分する！　であってる？」

「合ってるけど、成分表示した方がわかりやすいかもしれない。線積分の成分表示をすると、こうなる」

$$\int_a^b \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt \tag{4.29}$$

「そうだね……あー、面積分の方は結構面倒になるね……。まぁ、計算はできるはずだし、いいか！」

4.6　グリーンの定理

「面積分を考える時に、積分変数が 2 つ出てくる。あおいはさっき計算できたけど、数学的には重積分ってものを考える必要がある。……定義は Riemann 和の極限なんだけどね」

$$\int_S f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l}^{m,n} f(x'_k, y'_l)(x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}) \tag{4.30}$$

「あれ？　さっきこれ否定されたやつじゃない？　変数は変えてるけど」

「面積分としては否定した。けれど、重積分としては正しい。さっきのあおいの計算は r の積分をして、θ の積分をしていた。これをちゃんと書くとこうなる」

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l}^{m,n} f(x'_k, y'_l)(x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}) = \lim_{l\to\infty}\sum_{l}^{n}\int_{x_i}^{x_f} f(x, y'_l)dx(y_l - y_{l-1}) \tag{4.31}$$

$$= \int_{y_i}^{y_f}\left(\int_{x_i}^{x_f} f(x,y)dx\right)dy \tag{4.32}$$

「中身の積分をして、外側の積分をするんだ。うん。そのつもりだったけど、Riemann 和を考えてもいけるんだ。へぇ」

「まあ、すごくざっくりとした議論だけどね……さて、ここで考えて欲しいのは x_i と x_f は、y の関数であるということ」

「え？　……あ、そっか。S の縁のところが関数になってるのか。うん。確かにそうだ。x の積分範囲は y に依存してるのか」

「そう。こんな図のような積分範囲だったらそのまま、y を固定して切り取った直線での左から右までを積分すればいい。さて、ここからが本題。$f(x,y)$ じゃなく、偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を重積分したらどうなる？」

「？　そのまま積分すればいいんでしょ？　そしたら……あ！　偏微分が消えるんだ！」

$$\int_{y_i}^{y_f}\left(\int_{x_i(y)}^{x_f(y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx\right)dy = \int_{y_i}^{y_f}\left(f(x_f(y),y) - f(x_i(y),y)\right)dy \tag{4.33}$$

「そう。ここで、『周回積分』というものを考える」

「え？　なにそれ」

「今考えてる積分は、こういう道筋をたどっているよね。まず y_i から y_f まで、範囲の右側を駆け上がる。そして、y_f まで行ったら左側を通って、y_i まで下がっていく。第 2 項だね。……だから、この積分は、この周囲の線 C での積分として考えられる」

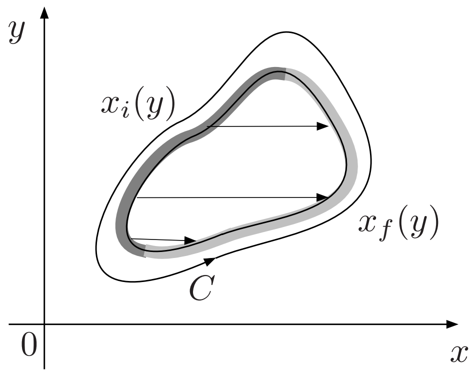

図 4　反時計回りの経路 C での周回積分として考える

「……え？　なんでそうする必要があるの？」

「端的に言うと、使うから」

「……わかった。えっと、積分範囲が足し合わさってるんだよね？　一周ぐるっと」

「そう。こう書ける。インテグラルの O はぐるっと一周するという意味。周回積分を表す」

$$\int_{y_i}^{y_f}\left(\int_{x_i(y)}^{x_f(y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx\right)dy=\oint_C f(x(y),y)dy \tag{4.34}$$

「おっと、ここではもう x は y を定めれば決まってしまうことに注意してね」

「めちゃくちゃ簡単になった！　じゃあ、y で偏微分したら x 積分の周回積分が出てくるとか？」

「うーん……少し違う。やってみればわかるけど、ここまでは同じ」

$$\int_{x_i}^{x_f}\left(\int_{y_i(x)}^{y_f(x)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy\right)dx=\int_{x_i}^{x_f}\left(f(x,y_i(x))-f(x,y_f(x))\right)dx \tag{4.35}$$

「うん。あとはこれを周回積分の形にすればいいんでしょ？」

「そう。確かにそうだけど、向きを見て。さっきとは少し違うよね？」

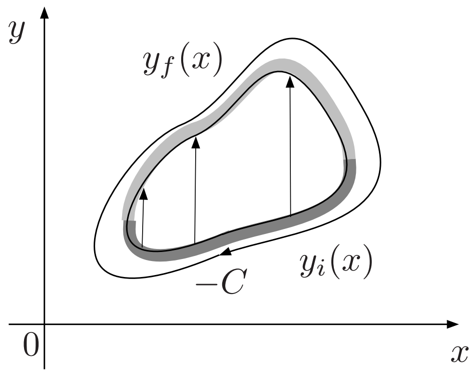

図 5　時計回りの経路 $-C$ での周回積分として考える

「……あ、本当だ。x が小さいの軌道が逆向きになってる！　じゃあ、マイナスがつくってこと！？」

「そう。こうなる」

$$\int_{x_i}^{x_f}\left(\int_{y_i(x)}^{y_f(x)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy\right)dx=-\oint_C f(x,y(x))dx \tag{4.36}$$

「へぇ……ねえ、この x 積分と y の順序って入れ替えれる？　こう、積分範囲をいい感じにやってさ」

「うん。『いい感じ』にやればいける。だから、今までの計算結果はこう書くことができるね」

$$\int_S\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C fdy+gdx \tag{4.37}$$

「これをグリーンの定理という。多変数関数において、大事な定理になるよ」

「へぇ！　名前がついてるんだ！」