あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 2 ベクトル解析

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

5　ガウスの定理・ストークスの定理

　今日は金曜日、週の終わりだ。今週末にはもう春さんのいる大学に行くことになっている。だから、今日で最後。そう思うと、自然と気が引き締まる。少しだけ緊張しながら、今日は物理室に来た。

「今日やるのは 2 つ。ガウスの定理と、ストークスの定理。この二つをやって、ベクトル解析は終わりにする」

　あかりは昨日までと同じように黒板の前に立ってそう言った。

「あ、そうなの？　もう終わりなんだ」

　意外とあっさりしていた。いや、難しいと思ったことも結構あったけれど、なんとかついてきたのだ。今日一気に、がっつりした内容をするのかと思っていた。

「……正直、あおいには悪いことをしたと思ってる」

「え！？　何で？　急にどうしたの」

「ベクトル解析を今週やってきたけど、内容は、大学生が 1 年かけてやるような……少なくとも半年かけてやるようなものなんだ。それを 1 週間。しかも平日の放課後という時間のない中やるのは、かなり忍びない……宿題をやる時間も潰してしまったし、肝心の受験勉強も……」

「あー、あかり。大丈夫だよそれは」

　私は少し暗くなったあかりを元気付けるようにそう言った。

「…………」

「最初に言ったじゃん。今更だって。先週の初めくらいにかな。あかりに教えてって頼んだ時。この1週間はそれに集中するんだ！　って決めてたから。決めてたから、無理なくついてこられた。……無理なくってのは、ちょっと言い過ぎかもしれないけど。実際、ゆっくり後で自分で追ってみないとよくわからなかったし。だけど、迷惑だなんて1ミリも思ってないよ。むしろ本当に、教えてくれてありがとう。分かり易かったよ」
　あかりは私の言葉を聞いて、目を伏せた。数秒して、顔を上げた。
「……そっか。……じゃあ、私も頑張ることにする。あおいにわかるように教える」
「うん！　お願いします！」
　あかりは目をつぶり、ふぅ、と1つ息を吐いてから、チョークを手に取った。

5.1　ガウスの定理　主張

「まず、ガウスの定理の主張を理解するためには、面積分についてもう一度考える必要がある。ベクトル場に対する面積分。それは、こう書けた。」

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right) dudv = \int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{5.1}$$

「ここで微小面積素 $d\boldsymbol{S}$ を使ったけど、大丈夫？」
「うん。変数変換で変わるところも一緒にまとめたんだよね？」
「そういうこと。$|d\boldsymbol{S}|$ がその微小面積を表す。……$|d\boldsymbol{S}|$ で積分するのなら、これはスカラー場の面積分になる。でも、ベクトル場の面積分においては、ベクトル $d\boldsymbol{S}$ を考える。……じゃあ、このベクトルというのは何なのか？」
「ん……その曲面に対して、垂直なベクトルだよね？　長さがその微小面積で……向きはどっちだろう」
　ベクトルというからには向きがあるはずだ。その向きは曲面に対して垂直だった。しかし、表向きか裏向きか。そういう問題がある。
「そう。曲面を考えたら、その向きというのを考えなければいけない。……言い忘れていたけれど、面積分を考える際には『向き付け可能かどうか』というのは気にしなければいけないところ。球面や平面は向き付けできるけれど、メビウスの輪は向き付けできない」
「あ、確かに。どっち向きに $d\boldsymbol{S}$ とればいいかわからないもんね。えっと、じゃあ、その向き付けがないとダメじゃん」
「そう。ガウスの定理は、向き付けのある曲面について……というよりも、限られた領域の表面について考えている」
「表面？　……何か形があって、その表面を考えてるってこと？　確かに、内向きか外向きかのどっちか向きが付けれるね！」

「一般的には外向きに向き付けをする。領域 V の表面を S として、」

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{5.2}$$

「という、面積分を考えていくことにする。ここまでいい？」

「うん。領域 V の表面 S で積分する。$d\boldsymbol{S}$ の向きは外向き。ってことだよね！」

「そう。この積分をしっかり見ていくことにする。そして、もう一つの積分を考える。今度は、体積積分」

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV \tag{5.3}$$

「これも関係がある量」

「えっと？　$\boldsymbol{F}$ の発散を体積積分する……ふぅん？　どういうことかな？　こう、V から発散していく量とか？」

「ああ、確かにおとといその話をしてたね。うん、そんな感じ。それで、ガウスの定理というのは、以下の式のこと」

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV \tag{5.4}$$

「……！？　えっ、こんな単純にイコールで結んじゃっていいの？！　ちょっと待って……あ、確かに良さそう！　$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ って、$d\boldsymbol{S}$ から出ていく量と考えられるから、だから、内部で発生した量が、外部へ出ていく……？　内部の量が外部からわかる……？」

　自分で言っていてよくわからなくなった。目の前の数式をじっと見つめていると、あかりはこう言った。

「そう。あおいのそのイメージが、物理学では必要になる。けれど、これは数学の定理。数学なんだから、数学として証明しないといけない。……あおい、ついてこれる？」

「うん！　頑張るよ！」

「……正直に言う。難しいよ。ここ」

「大丈夫！　しがみつく！」

「……じゃあ、しがみつけるくらいで、飛ばしていくよ」

　あかりはいつになく、挑戦的だった。

5.2　ガウスの定理　証明

「右辺と左辺のどちらから進んでもいいけれど、結局のところ和に直して考えたほうがいい。$d\boldsymbol{S}$ を成分表示して、それぞれをこの 3 つの積分に分ける」

$$\int_S F_x dS_x + F_y dS_y + F_z dS_z = \int_V \frac{\partial F_x}{\partial x} dV + \frac{\partial F_y}{\partial y} dV + \frac{\partial F_z}{\partial z} dV \tag{5.5}$$

「ここで、dS_x はもはや、$dydz$ と書けることに気づける？」
「ん……あ、そっか。表面で、x 方向に垂直なんだもんね。確かに、y 方向と z 方向の微小長さ、その積になるはずだよね。うん」
「と言うわけで、左辺第 1 項を Riemann 和で書く」
「出た、お約束の便利なやつ」
　あかりは黒板に式を書き進める。

$$\sum_{k,l} F_x(x, y_k, z_l)\Delta y_k \Delta z_l \tag{5.6}$$

「うん。そうなるよね」
「いや、こうはならない。もう一度、面積分を思い出す。面には向きがあった。そして、今回はこの $\Delta y \Delta z$ の幅を持つ柱には……2 つ、面がある。だから、『上の面』と『下の面』を考えて、こうしなければいけない」

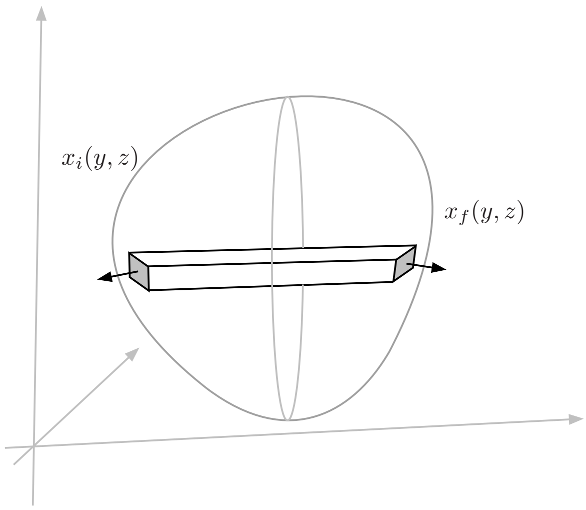

図 1　閉曲面が囲む領域を細長い立体に分割する

$$\int_S F_x dS_x = \lim_{m,n} \sum_{k,l}^{m,n} (F_x(x_f(y_k, z_l), y_k, z_l) - F_x(x_i(y_k, z_l), y_k, z_l))\Delta y_k \Delta z_l \tag{5.7}$$

「ああ！　そっか！　2 回カウントしてるんだ！　確かにそれは注意しないといけない……それで、これがどう偏微分とくっついていくの？」
「ここからは単純に考えればいい。もう一度……積分の中で、積分をする」

$$\int_S F_x dS_x = \lim_{m,n} \sum_{k,l}^{m,n} \int_{x_i(y_k,z_l)}^{x_f(y_k,z_l)} \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y_k, z_l) dx \Delta y_k \Delta z_l \tag{5.8}$$

「ほう！あ！　それで体積積分になるんだ！」
「その通り。もう少し厳密に書くと、……添字が足りないから少し変えるけど」

$$\int_S F_x dS_x = \lim_{l,m,n} \sum_{i,j,k}^{l,m,n} \frac{\partial F_x}{\partial x}(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_x}{\partial x}(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \int_V \frac{\partial F_x}{\partial x} dV \tag{5.9}$$

「となる。かなり駆け足で証明したけど、大丈夫？」
「うん。なんとか、いろいろ飲み込んだところがあるけど……ざっくりとそうなりそうだなってことはわかったよ」
「うん、事実、これは厳密な証明じゃないから。実際に厳密に行うなら、もっと添字に気を使うべき。どの添え字が何に依存しているのか。省略はできない」
「ふぅん……最後 ΔV に戻してから体積積分にしたのは、変数変換しても体積要素として変わらないってのをちゃんと書くため？」
「うん、そんな感じ。ちゃんと書くなら、総和の添え字ももっと一般的なものにしないといけない。今回は $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ と……ああ、添え字を付け替えたのはイメージを簡単にするため。ΔV_i のように、添字 i で V の範囲が分割されていると考える」
「へぇー……柱に区切って、考えてるんだ。あ、で、今のが x 方向で、同様に全部の方向を計算すれば、この式が出てくるんだ！」

$$\int_S F_x dS_x + F_y dS_y + F_z dS_z = \int_V \frac{\partial F_x}{\partial x} dV + \frac{\partial F_y}{\partial y} dV + \frac{\partial F_z}{\partial z} dV \tag{5.10}$$

「そう。そういうわけで、ガウスの定理を示すことができる」

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV \tag{5.11}$$

「これは電磁気学においてかなり基本的な定理。数学としては少し難しいけれど、物理において既知のものとみなされることが多い。……らしいよ。だからあおいが今のうちから覚えておいて、絶対に損はないはず」
「あと証明も覚えておきたいね！　上の面と下の面。そしてそこれに挟まれた体積！　うん！　にしてもすごい定理だね！」

5.3　ストークスの定理　主張

これにてガウスの定理は終わり、とあかりは板書を消した。
計算は重かったが、あかりはまだ余裕そうだ。いや、これからする計算の方が大変だ、という判断か。

「もう一つ重要な定理がある。ストークスの定理と呼ばれるもの。これは面積分と線積分を結びつける式」

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{5.12}$$

「へぇ面と……線？　ガウスの定理って、立体とその表面の積分についてだったよね。今回は面と線……どういう関係にあるの？」
「ある曲面と、その縁の線。まず、曲面は向き付け可能とする。そして、右ネジの進む向きが曲面の向きとなるように、縁の向きを決める。これが線積分の向きになる」
　あかりは図を描く。ふむ、面とその周りの線……ん？　なんか似たようなこと前にやった気がするぞ？

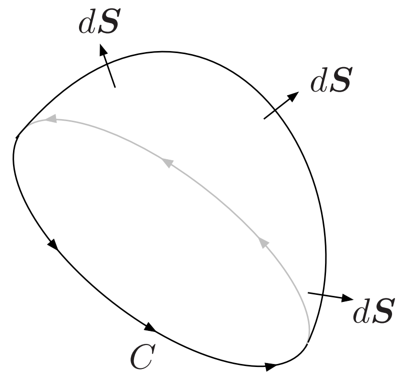

図 2　閉曲線 C を縁とする面の微小面積ベクトル

　ええと、ある面の領域があって、その周りの……。
「あ、グリーンの定理みたいなものか！」
「そう。グリーンの定理は xy 平面上の定理だったから、面の向きは z 軸の向きになる。そうしたら、右ネジが回る方向は、こう、反時計回りになる」
　グリーンの定理……初めて見たときは『なんだこれ』と思いはしたが、こういう風に拡張できるんだ……。平面の話が、曲面の話に。
　思えばこれまでの定理も同じだ。知っているものを、立体的に拡張していく。ベクトルも、関数も、微分積分も。適切に拡張していっているのだ。
「こんな拡張ができるんだ……これって、グリーンの定理の拡張なんだよね？」
「その通り。この定理の主張は、『回転の面積分は縁の線積分になる』ということ。面の上での回転が、その縁に影響を及ぼす。ってイメージ」
「それっぽいね！　回転の面積分かぁ……えっと、回転って、文字通り回転方向に向きを持ってるんでしょ？　ってことは……曲面に垂直な回転がどのくらいか、曲面内でどのくらい回転してるかって性質がわかる……のかな？」

「そう。右辺の線積分は、周囲に出てきた回転を計上している。……ストークスの定理は本当に『回転』というものを表すのかもしれない。本質的に」

回転……ぐるぐる回る渦のようなものが、曲面の上に張り付いているのを想像する。その渦を全て面の上で考えるのと、外側の境界部分だけを積分すること。それらが同じ。直感的には『あー。それっぽい？』というような曖昧な感じだけれど……ああ、でも回転は微分でもあるのか。だったら、縁だけにその影響が出ると考えてもいいかもしれない。

微分した関数を積分したら、元の関数に積分範囲の一番上と一番下を代入したものになる。端の影響しかないと考えるとそれっぽいかもしれない。

「あ、そういえばさっきのガウスの定理は、どちらかというと発散感があったよね。内側で発散しているのが、表面でぶわっと……こう、ぶわっと」

「外側に流出している？」

「そう！　そういうこと！　ガウスの定理が発散に関するもので、ストークスの定理が回転に関するもの！　うん！　それっぽい感じだ！」

5.4　ストークスの定理　証明

「じゃあ、証明に入る。今回は、計算が辛い。覚悟しておいて」

「よっし！　了解！」

「計算するのは左辺から。これをまず、展開する。パラメーターを u, v として、そのまま展開する」

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \right) \right. \tag{5.13}$$

$$+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \tag{5.14}$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] dudv \tag{5.15}$$

「ぇっ。ちょっと待って！？　しょっぱなからめちゃくちゃ長くない？！」

「でも、展開したらこうなる。回転の成分表示をして、外積の成分表示をした。それの内積をとった……式の通りに計算すると、当然こうなる」

「ん、ま、まあ！　当然だけど！　……そっか、これが覚悟しておいてということか……！」

「うん。でも、先には進んでいるから大丈夫。ここからは部分的に見ていく。というのも、F_x のみの成分を見ていく。そうすると、その部分の積分は」

$$\int_S \left[\frac{\partial F_x}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{\partial F_x}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]dudv \tag{5.16}$$
$$=\int_S \left[\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]dudv \tag{5.17}$$
$$=\int_S \left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial F_x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial F_x}{\partial v}\right]dudv \tag{5.18}$$

「ひとまず、ここまで変形できた。ついてこれる？　あおい」

「ん、まだ大丈夫！　えっと、最後の式変形は偏微分の変数変換を使ったんだよね！　今回考えている曲面は u, v で表すことができるから！」

「本当はもう少し考える必要がある。実際に使ったのはこの式」

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial F_x}{\partial u} \tag{5.19}$$

「んー。あっ！　足して引いてってしたんだね！　納得です！」

「そして、さらに足して引いてをしていく」

$$\int_S \left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial F_x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial F_x}{\partial v}\right]dudv=\int_S\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}F_x\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}F_x\right)\right)dudv \tag{5.20}$$

「ん……今回は何をしたの？」

「偏微分の入れ替えができることを用いた。つまり」

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \tag{5.21}$$

「あー、なるほどね。あとは積の微分の公式を使えばできるね。ここからどうするの？」

「あおいは知ってるはず。ストークスの定理が何の定理に似ているか」

「ん……もしかしてグリーンの定理？　あっ！？　これグリーンの定理使えるじゃん！」

「そう。これより、」

$$\int_S\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}F_x\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}F_x\right)\right)dudv=\oint_C F_x\frac{\partial x}{\partial v}dv+F_x\frac{\partial x}{\partial u}du \tag{5.22}$$
$$=\oint_C F_x\left(\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial u}du\right) \tag{5.23}$$

「F_x で括ることができる。そして、このカッコの中身。これは……全微分の形になってるよね！」

「全微分！　なんか、ストークスの定理、集大成！　って感じだね！」

　あかりはさらに計算を進める。

$$\oint_C F_x\left(\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial u}du\right)=\oint_C F_x dx \tag{5.24}$$

「となる。以上のことは F_y, F_z においても同様に成立するため、結果として以下が得られる。」

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{5.25}$$

「これにて証明終了」

「うぉぉぉぉ！！　すごい！　めちゃくちゃゴッチャゴチャしてたけど、終わってみればすごく簡単な式になった！　こんなに計算してたんだね！　すごい！　本当にすごいよ！！」

5.5　ベクトル解析のまとめ

膨大な計算の後に残されたのは、思い返せばたったの 2 つの式しかない。しかし、ここに辿り着くまでに壮大な冒険があったとは思わなかった。ベクトルと微積。どちらも高校で習うものだが、大学に入ったらここまで一般化されるものなのか。

「今日で私のベクトル解析の解説は終わり。お疲れ様、あおい」

「いや！　本当にあかりお疲れ様！　すっごく大変だったね！」

「……まあ、多少は。でもあおいの発見も結構私の刺激になった。ありがとう」

「いや！　お礼を言うのは私の方だよ！　これで日曜の春さんの話を聞ける！」

「よかったね、あおい。電磁気学で使うベクトル解析は……このくらいしか無いのかな。ガウスの定理とストークスの定理。基本的にはこの 2 つを駆使することになると思う」

「ん？　……あかりは行かないの？」

「え？」

「春さんの話、聞きに行くんじゃないの？　私はそう思ってたけど……あ、なんか用事あるとか？」

あかりは少しの間私を見て沈黙する。なんだろう。私の早とちりだったのだろうか。あかりとは約束していなかったか？

「……いや、私も行く。あおいだけが行くのは、少し不安だし。教えきれてないところがあるかもしれない」

「ん……まあ、私もあかりがいてくれた方がありがたいけどさ！　やった！」

正直なところ、大学が怖いのだ。だって初めて行くのだもの……。

「ベクトル解析という分野自体は、実際はもっと拡がっている。ガウスの定理とストークスの定理は、むしろ入り口にすぎない。だから、専門書で学ぼうと思えばまだまだ学ぶことができる。……電磁気以降を学ぶには、また新しい数学が必要になる」

「うん！　その時はまた一緒に勉強しようね！」

「……いや、違う大学になるかもしれないじゃん」

あかりは真面目なトーンでそう言う。そうなんだよなぁ……大学、大学かぁ。私が理系なのは間違いないけれど、物理や数学がそれほど得意というわけではない。こうやって専門的な分野を勉強しているが、本当はそんなことをしている場合ではないんだよなぁ……。

大学に入った後……私は何をしたいのだろうか？

物理？　本当か？　私は物理をやり続けることができるのだろうか？

「でも違う大学でも、連絡を取ることはできるじゃん！　その時、いろいろ聞かせてもらうよ！」

「……いいよ。私もあおいにいろいろ聞くかもしれない。もう少し後だけど、その時はよろしく」

こうして、1週間にわたる、あかりによるベクトル解析の講義は終了したのだった。内容は詰め込みすぎで、時間も大量に消費してしまったが、私はこれでいいと思っている。

だって、重要なのはこれからなのだから。これから、楽しんでいけるか。私はこの1週間で、大学に入ってからの数学が少し楽しみになった。それだけで、成果はあったのだ。