あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 3 Maxwell 方程式

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

1　ガウスの法則

　日曜日の朝 10 時。春さんの通う大学の最寄駅に集合……とのことだった。一般の高校生は入れないんじゃないかと話をしたが『むしろ歓迎するよー』と春さんは言っていた。大学……どんなところなのだろう。人生の春休みという言葉をよく聞くけれど私の印象としては別だ。受験を勝ち残ってきた猛者たちの集う……というものだ。だから大学へ行くとなると少し怖いものがあった。
「……緊張しすぎ」
　と、出発前にあかりはそう言った。「仕方ないじゃん」と返事をしつつ、私たちは大学の最寄駅に向かった。正直、あかりがいなかったらと考えると私は緊張で潰れてしまいそうだった……。電車に乗っている間、ずっとどんなところなのか、ビクビクしていた。そんな様子にあかりは呆れていた。あかりは全く緊張していないようだった。
「やっほー！　よく来たね！」
　駅のホームで春さんは待ってくれていた。電車の中で見る服とは一風違い、少しおしゃれに見えた。ひょっとして新しい服を買ったのかもしれない。
「春さぁーん……」
　緊張に潰されそうで、たまらず春さんに抱きつく。背がちょっと高い。あと柔らかい……。
「どうどうっ。どうしたんだい」
「緊張してるらしいです」

「緊張……あっはっは！　よそ者のように見られてしまうかもって？　大丈夫だよ。大学の構内歩いても、ほとんどは知らない人だから。年上なのか年下なのかも見た目じゃわからないし」
「まぁ……人数も多いですし、そうかもしれないですけどぉ。でも、皆さん受験を突破してここまで来てるわけですし……」
「うーん。まあ、それもどうだろ。大学に入ったらそれ以前の経歴なんてあってないようなものだからね。みんな気にしないよ。高校生がいたとしても……あおいちゃんはこの学校志望なんでしょ？　だったら歓迎されるはずだよ。もっと堂々としていいよ」
「堂々と……うーん」
　言われただけでできるなら苦労はしない……というか、まだ心理的ブレーキがかかっている。
「みんな自分のことに手一杯で、他人を見る余裕がないってのが本当なんだけどね。ま、立ち話もなんだし、行こうか。ようこそ。教室をとってるから、行くよー」
「……はい！」
　春さんと一緒に、階段を上る。駅を抜ければ、そこは大学。……高校生二人、オープンキャンパスでもないけど突入します！
「……私、ここの図書館結構使ってるよ」
「えっ、そうなのあかり！？」

1.1　クーロンの法則

「大学の教室って、もっとこう……講堂みたいな形してるのかなって思ってました」
　春さんに大学内を一回り案内されて、その後に私たちは校舎内に入った。校舎の外には何人か歩いている人がいたが、日曜日だからか校舎内には私たち以外に人はいなかった。
「大教室とかはそうなってるけど、全部が全部そうなってるわけじゃないからね。高校の授業みたいに、普通に教室で講義してるよ。あとはサークル活動で予約して使ったり……って感じかな」
　私たちは物理室での定位置……つまり黒板に一番近い、教卓の目の前の席に座る。
「さてっとー。始めて行きますかね。わからないところがあったらその都度聞いていってねー。遠慮は不要だぁー」
　春さんはバッグからファイルを取り出し、その中からルーズリーフの束を手に取る。黒板にクーロンの法則、そして式を書く。……春さん、こんな字を書くんだ。
「はい。これが高校でもやる、クーロンの法則。高校では距離の二乗に反比例するって式だったけど、ベクトルも考慮するとこういう式になる。……さてあおいちゃん、これは、

何を表す式だ？」

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.1}$$

「え、えっと……」

突然質問されてしどろもどろになる。ええっと、落ち着け。この式は……点電荷に関する式だったはずだ。そして、ベクトル……これは、ええと……位置ベクトルだから。

「『電荷 Q が原点にある時の、位置 $\boldsymbol{r}$ における電場』……ですかね」

「その通り！　……逆に言えばこの式は、電荷が十分に一点に集まっていると判断できるときにしか使えない」

「コンデンサーの時は、ガウスの法則で導いてました」

「うん。閉曲面をとってあげて、それを貫く電気力線の本数で考える。それがガウスの法則だったよね。『任意の閉曲面を貫く電気力線の合計は、閉曲面内部の電荷を誘電率で割ったものである』でも、これは……数式的には、どう書けるだろうか？」

「本……スカラー量ですし、面積分ですね」

「その通り。あかりちゃん」

「……えっと、どの通りかわからないんですけど」

「たとえば、原点を中心とした、半径 r の球面を考えるよ。こうした時……この面の上で、この式の電場を面積分すると、どうなる？」

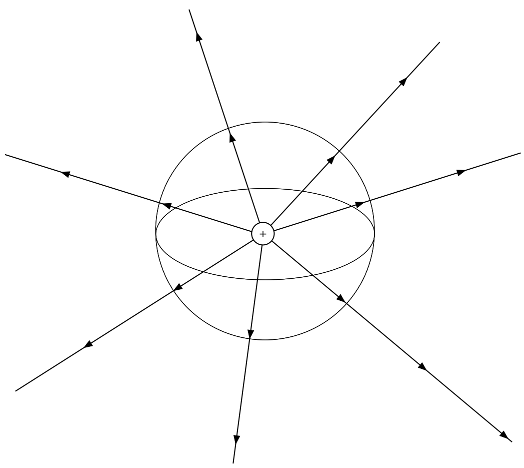

図１　電荷 Q を中心とした半径 r の球面で電場を麺積分する

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \ ? \tag{1.2}$$

「面積分……！」

あかりと一緒にやったものだ。落ち着け。まずは面積要素を考えるんだ。ええと……そ

の面の上のベクトルは、極座標を使って $\boldsymbol{r} = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$ で与えられる。積分する文字 $d\theta$ は $d\phi$ とだから……ええと。ノートに計算する。

$$dS = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right| d\theta d\phi = \left| \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right| d\theta d\phi = \cdots \tag{1.3}$$

「お、できたかな。実際、こうなるよ」

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.4}$$

　最終的に出てきた式は、このようなものであった。

「あ、……」

　ガウスの法則で出てくる、閉曲面を貫く電気力線の本数だ。

　式を見る。その通りだ。電場に面積をかける……それはつまり、その面積を通過する電気力線の本数を表しているのだ。ここで本数というのは、あくまでも抽象的なもの……数えられるものではない。それを球面で、ぐるっと積分すれば……外向きに出て行く電気力線の本数を考えることができる。そして、それこそ、ガウスの法則に使われているものであった。

「さて、ここで考えるべきことはもう一つある。『もし、この閉曲面が電荷を囲わなかったら？』ということ」

「囲わなかったら……」

　ノートに図を書いて考える。ある閉曲面の外側にだけ電荷があり、内側にない……すると、電気力線は素通りする。入った分だけ出て行く。

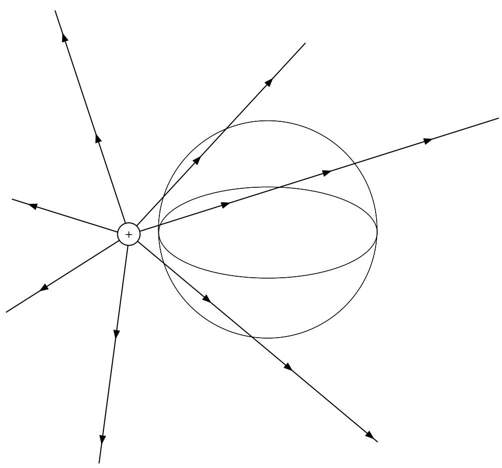

図 2　球面の内側に電荷がないとき

「実はこの式が成り立つ。つまり、$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ の時は $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ということだね」

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \tag{1.5}$$

「ああ、定義域が $r \neq 0$ だから、原点ではこの式は成り立たない。調和関数じゃなくてグリーン関数か……」

「そういうこと。境界条件を適切にとれば調和関数とも考えられるけどね。だから、原点を囲わない閉曲面 S ではこう」

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}\, dV = \int_V 0\, dV = 0 \tag{1.6}$$

……原点での話が重要になるのか？　確かに原点、つまり電荷それ自身がある位置では電場を考えることはできない。だから、原点での発散は考えられない……だけれど囲った面ならわかるということか。

「あ、これって内側の電荷が出てくるんですか！？」

「ん。理解できたみたいだね。さて……ということは、この式はガウスの法則を表していると考えることができるよね。ρ は電荷密度。体積積分することで、V の中にある電荷全体となる」

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV \tag{1.7}$$

そうか。積分で書けるのだ。『面を貫く電気力線の本数』も、『内側にある電荷』も。

物理が……数式で表されている。

「さて、言葉の上でのガウスの法則は、『どんな閉曲面でも』成り立つ。よって、この方程式はいつでもどんな時でも成り立つものと考えることができる。さて、これがマクスウェル方程式の一つ目になる」

「マクスウェル方程式……？　そんな式ありましたっけ」

1.2　電場のガウスの法則

「うん。この式から、次の式を導くことができるんだ」

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.8}$$

春さんは黒板に、ナブラを使った式を書く。こっちの式は見たことがある。両辺に ε_0 をかければ、真空中で $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$。私がメモした式 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ と同じになる。

でも $\boldsymbol{E}$ でも同じ式が成り立つのか……？

「なるほど……難しそうですね」

「のんのーん。あおいちゃん。この計算は難しくはないんだよ」
「え？」
「私が言ったこと、覚えてるかな？　難しいのには理由がある」
「あ……『曖昧である』『複雑である』『知らない』……」
「今回の場合は『知らない』だ。やり方を知らない。いや、まだ『曖昧』だと思ってるのかもしれない。けど、これはそんなに難しいことじゃない。そうだよね。あかりちゃん？」
「……はい。ガウスの定理ですよね」
　あかりは春さんの問いかけに答える。私もハッとする。体積積分だ。
「ガウスの定理より自明……ってしたいけど、これにはちょっとばかし気をつけることがある。それは、領域が任意であるっていうこと。積分形のガウスの法則から、次の式変形ができる。ここで V は、閉曲面 S で囲まれた領域とする」

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV \tag{1.9}$$

「あー！　それで Q を電荷密度 ρ で表すんですね！　そしたらどっちも体積積分になる！　ガウスの法則で！」
　春さんはそう、と言って式を書き換える。

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV \tag{1.10}$$

「ここで気をつけるべきことは、『いつも被積分関数が等しくなっているのか？』ってこと。あくまでここで等しいと置いているのは、領域 V での積分を実行した後の値についてだけ。被積分関数が V の中ではどこでも等しいとは言ってない」
「え、じゃあどうするんですか？」
「あおい、ここはたぶん物理の話だと思う。S は閉曲面というだけで、具体的に指定はしていなかった。だから、どれだけ小さくてもいい」
「えっと……これはかなり小さな領域 V でも成り立つってこと……あ！　もはや一点とみなしていいわけだ！　つまり、被積分関数は一致している！」

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.11}$$

「おっけー！　あかりちゃんも大丈夫だよね？」
「……条件は厳密にはもう少しありますよね。それほど変分はやったことないんですけど、滑らかさが関数と境界に課されそうって感覚しかわからないです」
「おおう。その辺は私もしっかり認識していないんだけど……でも、この微分式が成り立つとしたら、ガウスの法則は成り立つでしょ」

「確かに。こちらが基本法則なら、はい、大丈夫です」
「…………」
あかりは本当に数学に強い。そういえば、物理は数学的に見れば欠陥が多いと聞いたことがある。その部分を落とし込んでくれるあかりはとても心強い。でも、驚いた。あかりがこんなにがっつくとは……私には正直、何を言っているのかよく分からない。わかるような、分からないような……。
「まあ、以上のことから、マクスウェル方程式の第 1 式を手に入れることができました！
ちなみに、今の導出は、適切な条件を与えることで逆向きに解くこともできる。つまり、マクスウェル方程式からクーロンの法則を導くこともできる。確認してみてね」

1.3　磁場のガウスの法則

「じゃあ、次に第 2 式、この式について考えてみる。……さて、これは何を表すかな？」

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.12}$$

春さんは先ほどと似たような式を黒板に書く。
「磁束密度に、ナブラをかけたものが……0 になる。ですか。磁束密度……磁場についての式ですよね……」
高校の物理に……先週やった内容にこれと似た式はあっただろうか。
「…………」
あかりは何も言わずに、私のほうをじっと見ている。もう、これが何を表しているのかわかっているということなのだろう。
「ええと……あ、さっきの逆をすればいいんですね」
これをまず、任意の領域 V で体積積分する。すると、ガウスの定理が使えて……。

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B}\, dV = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.13}$$

「…………」
ガウスの法則、のまた少し違った形になっている。これは、もうちょっと考えなきゃ……。
春さんの言ったことを思い出す。これはあくまでも、積分の結果が 0 に等しいと言っているだけだ。磁場が 0 であるはずがない……そもそも、最初の式は微分方程式だ。だから、何かしらあると思うのだが……。
半径 r の球面で考えてみよう。すると磁場は……ん。磁場はどの向きだ？　とりあえず、電場と同じように外向きにあるとすると……あれ。磁場ってそもそもループするん

じゃなかったっけ？　こう、直流電流の時そうだったみたいに。
「ええと……電流の周りに、ぐるっと磁場のループができるんでしたよね。……これってそういうことを表しているんですか？」
「うん。その通り。式変形してみれば、『磁場が出て行ったら、その分入ってくる』もしくは『磁場が入ってきたら、同じだけ出て行く』ってことを表している」
　なるほど。確か面積分というのは『そのベクトルの面に垂直な量』を計上しているんだった。電流の周りにできるループの磁場。通り過ぎるだけの磁場なら、入ってきた磁場は出て行くはずだ。そう。まっすぐ通過するだけでも……。
「あれ……」
　まっすぐ通過するだけ？　……確か、電気力線もそうだったんじゃないか。正電荷から、負電荷へ、線がすっと、伸びている。……途中で切れたり、交わったりせず。そしてそれは、磁場も同じではないか。
「電場と磁場のいちばんの違いはここ。『湧き出し』に注目したら、どうなるのか」
「『湧き出し』……ですか」
　電場が、湧き出す。……電荷から、湧き出す。なるほど。それなら電気力線の発生の仕方にも納得ができようものだ。しかし、磁場に湧き出しがない、ということなのだろうか。
「でも、磁石って、N 極から磁場が出て、S 極へ入っていくじゃないですか。……電荷のプラスとマイナスみたいなものですよね」
「おっと、それは少し違うんだよね。一つ回路がループすると、それに巻きつくように……ドーナツを縦に一周するみたいに磁場のループができる。回路が何重にも重なった……ソレノイドコイルを考えたら、これって実は磁石と等価なんだよ。磁力線の形が、ほとんど同じでしょ？」
「はい！　それはちょっとやりました！　あ、そっか。磁石の端っこに N と S があるってことじゃないんだ！」

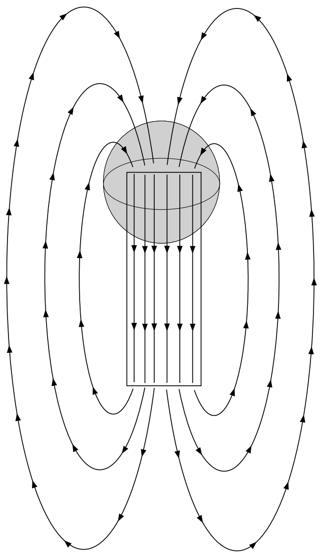

図 3　磁石の端で磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は湧き出していない。

「その通り。実は磁石は、内部に電流のループがあって、そのループが揃っているんだ。だから磁石とこのソレノイドコイルは、だいたい同じと考えることができる。……さて、磁気の発生源は、なんだろうか」

「磁気の発生源は……電流！　ですね！　そっか……磁石は、あくまでも副次的なもの！　『N 極』『S 極』は電流で出来上がってるんですね！」

「そういうこと。さて、これでマクスウェル方程式の一つ目と二つ目が導かれた」

黒板を一度見て、ノートを見直す。第 1 式は少しだけ違うが……確かに。$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ という式はそのまま載っている。

「……なんか、結構あっさり導けましたね」

「そう。全く難しくなかったでしょ？」

春さんは黒板の式を二つ、赤線で囲む。マクスウェル方程式の、一つ目と二つ目。初めて見たときは、なんてわけのわからない式だと思っていたが……今になって見てみると、なんの難しいこともない。クーロンの法則と、磁場の湧き出しについての話だったのだ。

春さんの言った通りだった。難しいなんて、そんなことはないのだ。難しいは分けろ。『曖昧』『複雑』『無知』の三つに。この三つに分けて、一つずつ潰していく。これが重要な作業。これこそ、勉強というものなのだ。そこに、『難しい』なんてものは存在しない。

「難しい、って言うべきなのは『もうどうしていいか途方にくれた』ってこと。『曖昧』だね。それが一番面倒だ」

「『曖昧』、ですか」

「……それって、なんの話？」

「あ、あかりには言ってなかったね。先週、春さんが教えてくれたんだ。『わからない』『難しい』には幾つかの種類がある。『曖昧である』『複雑である』『知らない』ってこと」
「……なるほど、確かに『曖昧』が一番厄介ですね」
「え、そうなの？」
あかりはいつものように、一瞬で話の流れを理解したようだ。うんうん、と頷いている。
「曖昧だと、そもそも解釈のしようがない。直感的な理解はどうしてもできない。……にもかかわらず、直感的な理解を要求してくる本は多い。詳しく書かない本……『あえて詳しく書かない』なんてね」
「そうだよねー。本当。教えてくれる人がいるなら別だけど、独学するしかない、って状況だと本に頼りっきりになるからね」
　と、春さんとあかりは少し頭を抱える。二人とも、思い当たる経験があるのだろう……。まあ、私の知識もだいぶネットで調べたものだけれど。
「まあ、電磁気学は直感的に理解しやすいものが多いからね。特に基礎理論の部分は。さて、この調子で、３つ目と４つ目も導出していくよー」