あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 3 Maxwell 方程式

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

2　アンペールの法則

2.1　ビオ・サバールの法則

　大学の学食というものに初めて行った。取りたいものは自分で取る。注文したいものがあれば注文する。そもそも学食というものに世話になったのは初めてだ。緊張しつつ、自由な雰囲気を感じて新鮮な気持ちになる。
「んー。高校物理からアンペールの法則に持っていくには、ちょっと難しいことがあるんだよね」
　と、春さんは牛乳を飲みながら言った。
「難しいことですか」
「うん。えっとさ、高校物理では直流電流と円電流で、その磁場の大きさを別々に定義してたでしょ？　それを統合する必要があるんだけど、それはちょっと難しいことになる」
「……それは、曖昧ってことですか？」
「うーん。複雑の方だと思うけど……でも曖昧な部分もあるね」
「……線積分はやったので、具体的な式があれば」
「あ、じゃあ説明してもいいんだ。えっとね……クーロンの法則って知ってるよね？　電荷との距離の 2 乗に反比例する、っていう力を受ける。……さて、じゃあ電流と磁場の関係は？　って考える。結論から言っちゃうと、こうなるんだけど」

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{2.2}$$

春さんはどこからか取り出した紙に書き出す。ええと、電場と磁場の式か。

こんな複雑な式を覚えているのか。さすが大学生……

「クーロンの法則は、まあ電場が電荷との距離の 2 乗に反比例する。じゃあ磁場の方は？

って見てみると、これも距離の 2 乗に反比例する、ってこと。これで高校の内容も説明できるんだよ」

……初めに定数がある。そして体積積分……その内容とは、この……ベクトルと、そして位置へのベクトル。その外積。そしてなるほど。それは逆 2 乗則に従っている、と……。こうして並べてみるとその違いがわかりやすい。

「……へえ。面白いですね。体積積分で計算できるんですか」

「うん。電荷分布と電流分布がわかっていれば、電場と磁場が計算できる、って式だね。アンペールの法則はこの下の式、ビオ・サバールの法則と密接に関係している。」

「アンペールの法則って、どんなものなんですか？」

私は春さんに尋ねた。

「『磁場ループの中には、電流がある』……って、法則だよ」

2.2 アンペールの法則

昼食をとり、私たちは先ほどまでいた教室に戻ってきた。雨は降っていないが梅雨時期だ。雲の色が暗いから少しばかり不安になる。けれどもこの電磁気に関しては、今のところ不安はない。春さんが教えてくれるし、あかりといれば問題はない気がする。

「さて、アンペールの法則だけど、こんな式で表現される」

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\boldsymbol{i} \tag{2.3}$$

「磁場の回転……それが、電流密度に透磁率をかけたものになる」

「うん。数式を追う上ではそうだよね」

「あれ？　アンペールの法則って力に関するものでしたよね。磁場に関するものなんですか？」

「ん、そうだね。磁場に関するものとして解釈されるのが普通だね。力に関するものは独立にローレンツ力と考えられるね。……さて、この式をどう解釈しようか？」

春さんの問いかけ。……確かに、数式だけを追っていてはどうしようもない。ナブラはわかる。回転を取ることもわかる。ベクトル方程式だということもわかる。けれども、春

さんが問いかけているのはそこではない。物理の数式はただの式ではない。そこに必ず、物理的背景、物理的現象があるのだ。そして、その現象を見るためには……数学を使うのが一番良い。
「両辺を面積分してみます！　すると……左辺はストークスの定理から線積分、右辺は……あ、電流密度の定義から電流になります！」

$$\mu_0 \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 I \tag{2.4}$$

「おお、一発で行けたね。そう。その通り、厳密に言うなら、ある閉曲面 S をとって、その周り C を取る。その時に成り立つ式だね。幾何学的な位置関係に注意してね。$d\boldsymbol{S}$ がベクトルってことは、面に向きがあるってこと。表向きか、裏向きか。それによって $d\boldsymbol{S}$ の向きが変わるのには注意しようね」
　春さんは黒板に線積分の式を書く。

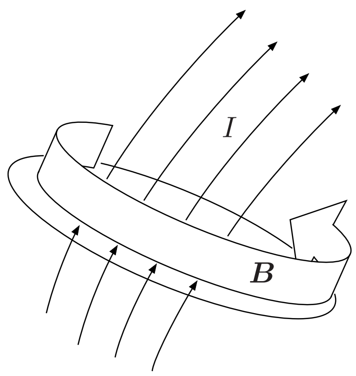

図１　電流が貫く面の縁で磁場の線積分をする

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{2.5}$$

「インテグラルに O が付いているのは、一周するってこと。線は線でも、閉曲線を考えてるってことだね。……さて、ちょっと面白いことを考えよう。電流 I が直線状に流れている。それに垂直に、半径 r の円 C を考える。その内側を S とする。……さて、どうなる？」
　春さんは図を描く。上向きに電流が流れている。面 S の向きは電流の向きと同じ。C の向きは右ネジの回る向きに定めた。

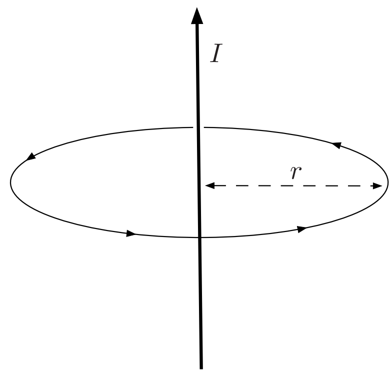

図 2　直線電流から半径 r の円上の磁場を考える

「え、これって高校の……ええと、その上の磁場の大きさって、$H = I/2\pi r$ だから、$B = \mu_0 I/2\pi r$ ですよね……？　あ」
「そう。気付いた？　それの分母の $2\pi r$……これって、ちょうど C の長さなんだよね。……最低限、向きはわかっているとしよう。電流に対して、磁場は右ネジを巻く向きを向いている。そして、系の状態から、この円周上では磁場の大きさは同じになるはずだ。……とすると、どう計算できる？」
「円周上では大きさは変わらないんですよね。だからそれを定数 B とおくことができます。……そして、残った積分はこの曲線一周分の長さなので、$2\pi r$ です。右辺はそのまま、この円周を貫くものを考えれば……！　はい！　高校のと同じようにできました！」

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi r B = \mu_0 I \tag{2.6}$$

　なるほど。こうやって計算できるのか。この計算手順を知っていれば、高校では迷うことはないだろう。私が感心していると、あかりが考え込んでいるのが目に入った。
「……前提としてるのは、アンペールの法則と、向きだけ。……いや、系の状態から円周に沿う方向の磁場はわかる。……ああ、あとはもうちょっと考えればいいのか」
「？　あかり、どういうこと？」
「……縦方向にも、横方向にも、磁場の向きがないことを証明しなきゃいけない。……円筒座標系で言うなら、動径方向と高さ方向。……あ、動径方向はないね」
「え？　どうして？」
　電流がまっすぐ伸びている。その状況から考えるに、外向きに磁場があってもおかしくはないと思うのだが……中心の軸から見てどの方向でも磁場は同じになる、という条件が付くはずだ。
「外向きでも内向きでも、磁場がもし動径方向にあったら……ガウスの法則に反する。磁場が出て行く、もしくは入ってくる形になる」

「え……ああそっか！　外向きに磁場はできない！　動径方向の磁場は側面を貫くから……」

　ガウスの法則。その磁場版だ。磁場は、湧き出すことがない。動径方向の成分があったら、この閉曲面に対して磁場の湧き出しが存在することになってしまう。だから、動径方向の成分は 0 であるべき、ということだ。

「上下……高さ方向への考察は、無限遠では磁場がないものとして考えていけばいいかな。……まあ、あくまでもこの直線電流が作り出す磁場だね。それ以外に外側に磁場を生み出すものがあったら、重ね合わせの結果が現れるけどね」

2.3　マクスウェルの変位電流

「……そういえばこれ、本当に任意なんですかね」

　と、あかりは言った。

「任意の閉曲線と、それを縁にもつ任意の閉曲面……そんなに、任意のって簡単に言っていいのかなって。……数学の問題だったら、一般性を失わない変数を置いて考えればいい。けれど、物理はもっとたくさん、いろんなパラメータがある。それを、簡単に一般の、って言っていいのか……」

　まあ、19 世紀の理論だから間違いはないんでしょうけど、とあかりは言った。

　それを聞いて、春さんはにやっと笑った。

「そうだね。実はこれは、間違っている……というより、『まだ任意性は言えない』。さて、何が悪いかな？」

　間違っているのか。この式が。……ノートに書き写した式を見つめる。ふむ。これは……ああ、確かに違う。さらにもう一つ項が追加されている。マクスウェル方程式と、少し違う。

「あ……。確かにダメですね。えーと……電場の時間微分……いや、それに $\varepsilon_0\mu_0$ をかけたものを、足さないといけない」

「おお、暗算でそこまで行ったのはすごいね。どうしてわかった？」

「はい、この式が成り立つとすると、これを微分した式も成り立つはず……そこで、両辺の発散をとったんです。そしたら、電流の発散が 0 になる……これって、おかしいですよね」

　あかりはノートを春さんに見せた。私もそれを覗き込む。

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{2.7}$$

ええと……電流密度の発散が 0……電流の湧き出しはないってことか？
「電荷の連続に反するね。この式は電流が外向きに流れることを否定してしまっている。もちろん現実では、領域の内部の電荷が減ることで外向きに電流が出てくる。修正するには、もう一つ項を足さないといけない。うん。その考察でいいよ」
　なるほど。話を聞いているだけだが、なんとなくわかる。確か回転の発散は 0 になる……式で表せば、$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}=0$ なのだ。……この式は磁場でなくても成り立つ。これは単純に微分の問題だ。それに対して、電荷の連続の式……いわば、『電流とは電荷の流れである』ことを保証する式、それを考えると、全く合わないものとなっているのだ。
　数式と、物理が矛盾している。数式が、この法則が正しくない……否、不十分なことを言っている。
「修正するには、電場の時間変化の項を入れればいい」
　そう言って、春さんは先ほどの式を 2 重線で消し、新たに式を書いた。

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\boldsymbol{i} \tag{2.8}$$

「この式なら大丈夫だよね。発散をとれば……$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$ を使って」

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{i}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{2.9}$$

「電荷連続の式になる。……逆に言えば、電荷連続の式を積分したらさっきの式になるとも言えるわけだね」
「なるほど、積分ですか。$\nabla\times\boldsymbol{B}$ が積分定数……」
「物理的考察かは置いておいてね……さて、『磁場ループの中には必ず電流がある』って主張は修正が必要になるね。電流だけじゃなく、電場の変化も必要になる。ここで、この……μ_0 がかけられていたこのベクトル量」
　春さんはマクスウェル方程式の一部分を改めて書き出した。

$$\boldsymbol{i}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.10}$$

「これを、マクスウェルの変位電流と言う。……ちょうど、Maxwell 方程式で電流のような役割を担ってるね」
「……それの発散が 0、ってだけで連続の方程式になりますね」
「そうだね。目の付け所がいいね、あおいちゃん。歴史的には、電磁気学をまとめる時に、マクスウェルがアンペールの法則に付け足したものとしてある、みたいだよ。本当かどうかはちょっと知らないけど……」
「でも付け足さないといけないですよね。どうしても」

「マクスウェルがまとめる以前は、ベクトル解析がそんなに物理に普及していなかった。だから、このミスに気付けなかった」

と、あかりは言う。

……そうだ。物理学は物理学として、ちゃんと発展することができる。しかし、そこに数学という道具があるかどうかで、扱いやすさがぜんぜん違う。今回、ベクトル解析というものが数学としてきっちり定められているからこそ、その上で電磁気学を考えることができた。それがなくては、とてもじゃないが、たどり着けない。数学を知る。それも確かに、物理をやる上では必要なものなのだ。

だから……それ以前の電磁気学が不完全だったとして、私たちにそれを責める資格はない。だって、私たちは何か見落としているかもしれないのだから。ベクトル解析という舞台の上なら大丈夫だろう。しかし、その舞台から外れたら？　……少しだけ怖い。

「……って、流れだったはず」

と、あかりは付け足した。３人とも歴史についてよく知らないまま、先に進むのだった。