あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 3 Maxwell 方程式

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

3　ファラデーの法則

3.1　電磁誘導

「さて、最後の一つはファラデーの法則だったよね。これは電磁誘導の法則とも言われる。こんな式があったよね？」

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{3.1}$$

「はい。Φ が磁束で、V が電圧……というか起電力ですよね！」
「うん。これを電場と磁場で表す。磁束は簡単だよね。磁場を面積分すれば良い。電圧もまた簡単。電場を線積分すれば良い。その境界でね」

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.2}$$

$$V = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.3}$$

　じっと数式を見ていたあかりが口を開いた。
「電磁誘導の法則は、ループした導線が囲む領域の磁場を変化させることだった。電圧をそう表すのは……」
「合ってると思うよ。あかり。電圧って電場と変位の内積だから、導線で積分してやって良いと思う。荷電粒子が 1 周した時にどのくらいのエネルギーを得るかっていうと、受ける力の線積分だし」

「……確かにそうか。符号はその向きであってる？」
「符号……えっと、上向きに磁束が増えたら……それを減らす向きに起電力が生じて……時計回りに起電力が生じるのか。ってことは、左辺の線積分は反時計回りになる」

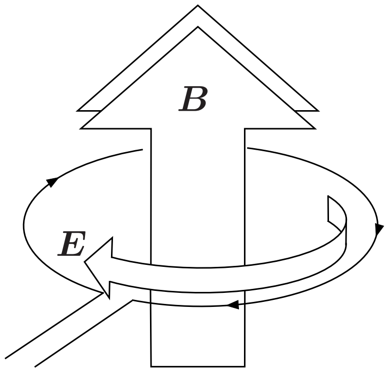

図１　回路を貫く磁束が増えると、それを打ち消す向きに電場が生じる

「その通り。面の向きとその境界の向き。境界の向きは面の向きに対して、右ネジを回す向きになってる。今回は逆向きだからマイナスがついてる」

　なるほど。ここのマイナスにはちゃんと意味があったんだ。物理の数学的な書き方を整えるために。

「さて、ここでベクトル解析の知識を使う。つまり、左辺の線積分を面積分にする。そのためには回転を使えばよかった。そして右辺。S が変化しないとしたら、$\boldsymbol{B}$ の時間変化だけが寄与する」

　春さんは式を変化させる。左辺を変形し、右辺を変形する。

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.4}$$

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.5}$$

そしたら、積分範囲が一致した二つの量が出てきた。
「あとは、この S は任意にとれるとして、被積分関数の一致から」

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.6}$$

「この式が出てくる。導出終わり」

3.2　動く回路とローレンツ力

　もう導出が終わったのか、と私は思った。あっけない……というのは、私たちが少しばかり成長したということなのだろう。積分の形にして、ベクトル解析の知識を使って、被積分関数を一致させる。ガウスの法則のところでもやったことだ。

「あの」

　と、私があっけにとられていると、隣にいるあかりが声を上げた。

「右辺の時間微分なんですけど、もう少し詳しくやってもらっていいですか」

「お、了解。さっき言ったのはだいぶ省略してたよね。S を固定するってこと。S を固定したらこの時間微分は積分の内部では偏微分になるってことは大丈夫？」

$$\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.7}$$

「はい。被積分関数は場ですから」

「うん。位置微分が生まれないんだね。積分路が変化しないとすれば、変化するのは磁場しかない。だから磁場の時間微分が必要になる。空間微分は必要ないわけだね」

「はい。……ただ、積分路が動いたらどうなりますか？」

「……そこだよねぇ」

　と言って、春さんは黒板に書いていた数式を一度消す。そして、円形の回路を書き、それの少しだけ移動した先を図示する。

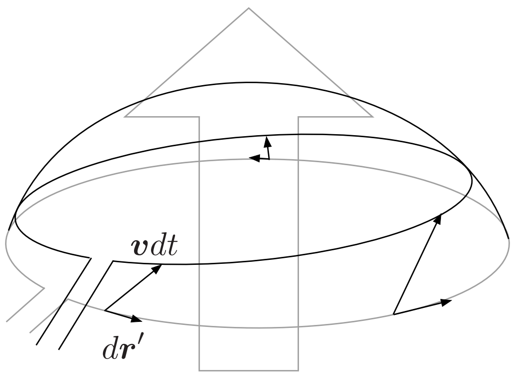

図 2　回路が変化すると貫く面が変化する

「回路が t 秒後に $\boldsymbol{v}t$ だけ移動したとする。この時、磁束の変化はどうなるかを見る。この時、変化した S の部分は……この、側面の円筒の表面積だよね。この面で面積分をしてやればいい。$d\boldsymbol{r}'$ がもともとの位置ベクトルの変化……つまり微小線素とすると、微小面積要素は $-d\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{v}dt$ になる。これを計算していけばいい」

「少し待ってください……はい。向きも大丈夫です」
　あかりは少し計算をする。そして、少し驚いたような顔をする。
「これ……」
「そう、気づいた？　回路が動く時は……実は、ローレンツ力と同じなんだよ」
「えっ……それって、どういうことですか？」
　マクスウェル方程式はもう揃ったのだろう。今までずっと欲しかった 4 つの式は。しかし、私はそれよりも今の話の方が気になっていた。あかりのノートを覗き込む。

$$d\Phi = dt \oint_C \boldsymbol{B} \cdot (-d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{v}) = -dt \oint_C \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r}' \tag{3.8}$$

まずこの式は、dt の間に磁束がどのくらい変化するのか、ということか。$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積順序を入れ替えることでマイナスが出てきたんだった。それで、dt が前に出てきた。それで……

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}' = \oint_C \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r}' \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{3.10}$$

　ふむ。$V = -d\Phi/dt$ だからこれでいいのか。……にしてもこの $\boldsymbol{E}$ って？
「磁場の中を動く回路には電場が生じる、だね」
「磁場を中を動く回路……そうですよね」
　春さんの言葉を私はおうむ返しする。そうだ。$\boldsymbol{E}$ は回路中の電場……？
「そう。問題はこれが電磁誘導の法則から出てきたこと」
「ローレンツ力って……ちょっと待ってください」
　確か、ローレンツ力というのは……磁場の中を通過する電流について考えていたんだった。進行方向と磁場に垂直な向きに力がかかる、という話を一つの電荷にも適用したものだった。今回は……
「あ、そっか……導線を電荷の集まりと考えれば、力は受けるのか……」
　今回は回路と垂直に動いているのだ。磁場と回路が垂直で、回路に垂直な方向に電荷が動けば……回路の方向に力が働く。つまり、回路に起電力が生じるのだ。
「そういうわけでもない気がする」
と言ったのはあかりだった。
「どういうこと？」
「……私が考えてたのは、積分路は回路しかないのか、ってこと。もしそうじゃないとしたら……ただ単に積分路が動いているだけになる。そこに何があろうとなかろうと、回路

上であろうとなかろうと……磁場の働きは電場になるのか、ってこと」
「磁場の働きが……電場になる」
　そう……なのか？　磁場の中を動けば、確かにローレンツ力は働く……けれど、もし動いているものに相乗りしているのなら……磁場ではなく、電場があるように見えるのか？
　だって、自分から見て、自分は止まっているのだから……
「いいねぇ二人とも」
　と、春さんはにやけ顔で言った。
「さあ、幕を開けようか——電磁気学の舞台。特殊相対性理論の」
「…………！！」
　鳥肌が立った。

3.3　Maxwell 方程式と相対論事始め

「まあ、そのためには光の速さを計算しないといけないね……まずはマクスウェル方程式を全部書き出してしまおうか」
　と言って、春さんは黒板にこれまで得られた式を書く。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.12}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{3.13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.14}$$

　初めの二つは電荷から電場が湧き出すということと磁場に湧き出すものは存在しないということ。次は電磁誘導の法則から、磁場の変化が電場の渦……電圧を作るという式だ。4 つ目は電流が磁場の渦を作るという式。それに変位電流項も加わっている。
「……こう見ると、あれですね。どれも当たり前のような気がしてきます」
「そうだね。でもこの 4 つで全て記述できるって、すごくない？」
「……これで全てなんですか？」
　私は疑問に思ったことを素直に口にする。この 4 つの式を導くときに、ほんのすこししか実験事実を使わなかった。電磁気的な現象はもっとあるはずなのに……この 4 つだけでいいのだろうか。
「うん。まあ今のところはね。この 4 つの式で全てが説明されている……全てってのは言い過ぎだけど。電磁気的な現象はこの 4 つの式を考察することで全て解釈される」
「あの」

　あかりも口を出す。
「これ、速度 $\boldsymbol{v}$ で見ている系では、式の形変わりませんか」
「おっと、そうでもないよ。……実は、さっきあかりちゃんが指摘してくれたように、磁場を横切ると、電場と解釈される。つまり、『電場や磁場なんてものは、動いているかどうかで変わる』んだよね」
「動いている人にとって、磁場は磁場じゃない……？！」
「磁場は電場に解釈される……なら、電場も磁場になるんですか？」
「いぇーす。$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ の時の第 3 式を見て。さっきの電磁誘導の式とほぼ同じ……だけれど、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の役割が反対になっている。つまり、『電場を横切るとき、それは磁場になる』んだよ」
「やっぱり……でも $\varepsilon_0\mu_0$ が付いてますよね？」
「そうだね。そこが電磁誘導とは違うところ。いや、マクスウェルが付け足さないと見つからなかったところだ。実はその値はとても小さい。真空の誘電率と、真空の透磁率。それぞれの値は、だいたいこのくらいであることがわかっている」

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\ m^2} \tag{3.15}$$

$$\mu_0 \approx 1.257 \times 10^{-6}\ \mathrm{N\ s^2/C^2} \tag{3.16}$$

「えっ！　こんなに……」
　こんなに小さいのか！　ほぼ無いとして扱ってしまいそうだ……
「そう。だから $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}$ というものが出たとしても、えっと、10^{-18} くらいの影響しかないわけだね」
「……そっか、だから見つからなかったんだ」
　相対性理論……というのはそういうことなのか。あくまでも電場や磁場は相対的なもの。実際は電場や磁場は見る人によって変わる。しかし、そんな現象が起こったとしても、普通は影響が小さすぎるんだ。
　へぇ……面白そう。