# あなたと恋する物理学
# 電磁気学
# Chapter 3 Maxwell 方程式

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

## 4　Maxwell 方程式

### 4.1　Maxwell 方程式の微分形と積分形

「さて、以上がマクスウェル方程式の導出だったけど、実際に使うときは積分形の方がいいことがある。まあさっきまでの復習なんだけどね」

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV \tag{4.1}$$

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.2}$$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.3}$$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.4}$$

　春さんは黒板にゆっくり式を書いていく。うーん。この $\partial$ って記号は何なんだろう……。あかりに聞いてみよう。

「あかり、この偏微分記号が積分範囲にあるのって、何？」

「これは境界であることを表している。だから、ある 3 次元領域 $V$ の表面は $\partial V$ って書いて、ある 2 次元領域 $S$ の端を $\partial S$ と書く」

「……表面は外向きにとって、端は面の向きに対して右ネジの向きに取る、のかな」

「うん」

なるほど。……ああそうか。端のある面かそうでない面かというのが違うのか。……$\partial\partial V$ なんてのは……ある領域の表面の端だから……ない、のかな？

そう考えているうちに、春さんは式を書き終えた。

「はい、これで 4 つの式が全て出たことになる。第 3 式は電磁誘導の法則そのままだね」

「こっちの方が使い勝手いいんですか？」

「うん。積分ってのはかなり使いやすい。実際の実験とか、問題を解くときとかは全ての点の情報が必要なわけじゃないからね。いろんな対称性があるときは積分の方が扱いやすい。ほら、奇関数を左右対称に積分すれば 0 になる、みたいなね」

「なるほど……でも、その分情報は失われてるってことですよね？」

「そうだね。確かにそうとも捉えられる。微分形の方が情報量は多いけど、手に負えないこともある。逆に、積分形は計算がしやすくなるけど、情報量は失われる……なるほどなぁ」

「……一長一短。使い所が肝心」

## 4.2 ローレンツ力

「それと、考慮しないといけないのはローレンツ力。ローレンツ力は点電荷について、この式で与えられる」

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.5}$$

「はい。……確かこれって、電磁誘導の時も同じようなことしてましたよね？」

「そうだね。確かに、磁場中にある粒子が動いている時、その粒子にとって、磁場は電場になるということ。この辺りは特殊相対論の話になるね」

特殊相対論、と春さんは当然のように言う。いいなぁ、と思ってしまう。

名前は聞いたことがある。でも、私はそれをあまり知らない。時間が遅れるとか、伸び縮みするとか、そんな話があることは知っているけれど……話だけだ。ちゃんとそれが科学であることを、私は知らない。

……なんか、寂しいなぁ。

「電荷密度や電流密度に働くローレンツ力はこれと同様に、この式で与えられる」

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B} \tag{4.6}$$

$\boldsymbol{f}$ は力の密度だろう。$q$ は電荷。それを体積で割れば電荷密度になる。となると第 2 項は $\rho\boldsymbol{v}$ になるけれど、これはちょうど $\boldsymbol{i}$ に等しいんだった。だから、$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}$ になる。そういえば電磁力は $IBl$ とかそんな感じだったな。体積をかけるときに、電流の面積分とそ

の長さをかければ良いわけだ。
「ちょうどこれを積分してやれば、電荷や電流に働く力になる。その時に、一般的には異なる点で異なる電場や磁場……そして速度場があることに気をつけてね」
「密度に働く力……ですか」
「そうだね。積分した時に初めて意味を持つ。……ってわけでもないけど。密度は密度。局所的に重要な量だ」

## 4.3 Maxwell 方程式はマクロかミクロか

　と、春さんは言う。窓の外を見る
「だいぶ日が傾いてきたね……あっ、そろそろ出ないと」
「もうそんな時間ですか。何時までここにいて大丈夫なんですか？」
「一応、5 時までってはしてる。あと……30 分くらいは大丈夫だね。で、話の続きだけど、単位体積にかかる力ってのは考えることはできる。できるけど……連続体力学の分野になるね」
「連続体力学……って、連続体の力学、ってことですか？」
「その通り。電磁気学ってのは、本当は連続体力学から入らないといけないのよ」
　と、春さんは言った。
　連続体力学……なんてものは初めて聞いた。そんなものがあるのか。
「粗視化……って言ってわかるかな。この世界は本当は原子や素粒子の集まりだけれど……それを、粗く見てやると、連続で滑らかに見えるよね。私たちが考えるスケール……$10^{-6}$ m くらいの範囲ではまだまだ物体は滑らかに見える。そのスケールの範囲では連続体として扱うべきなんだよ。原子の大きさはだいたいくらい $10^{-12}$ m のスケール。6 ケタ以上違うから相当だね」
「点として扱えるのは、それ以降……ですか。電子だけ考えれば点電荷として扱ってもいいのかもしれないですね」
「そうだね……そう考えると、Maxwell 方程式はマクロな式なのかもしれない。電子や陽子といった素粒子をざっくり考える。点ではなく、密度として電荷を考える」
「あっ、確かにそうですね。じゃあ点電荷って見えるようなミクロでは、やっぱりクーロンの法則を使うんですか？」
「そうなるね。……いや、量子力学か。そこまでミクロだと……でもポテンシャルはクーロンの法則で……」
　と、春さんはブツブツと何かを言い始めた。

## 4.4　真空中でないマクスウェル方程式

「真空と真空でないときは何が違うんですか？」

あかりはルーズリーフと黒板を見比べながらそう言った。

「端的に言ってしまえば誘電率と透磁率が違うんだけど……そうだね。どのくらいの電荷と電流をカウントするかって問題がある。真空中のマクスウェル方程式では、すべての電荷と電流をカウントしてるんだよ。で、物質中では少し事情は違ってくる。誘電分極と磁気誘導が起きることは知ってるかな？」

「はい。知ってます。電荷が偏ったり、電流ができるんですよね」

あかりは答える。

「お？　知ってるんだ。あれ、磁気誘導って高校でやったっけ？」

「授業では、やってないです。あおいが頑張ったので」

「へぇー……そっか。すごいねぇ。高校の範囲でもなんとかできるんだ……」

と、春さんは少し考え込む。春さんに褒められて嬉しいが、少し恥ずかしい。

「うん。それを電荷密度と電流密度に変換する。すると、自由電荷密度とは別に、誘導された分極電荷密度が出てくる。電流密度の方も同じだね。自由電流密度と、分極電流密度。あと、磁化電流密度があるね」

春さんは黒板に……少し長い式を書く。

$$\rho = \rho_f + \rho_p \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_f + \boldsymbol{i}_p + \boldsymbol{i}_m \tag{4.8}$$

ふむ。これは……$f$ というのは freedom、自由ということだろう。だとしたら。

「この $\rho_p$ と $\boldsymbol{i}_p$ ってのが分極電荷と分極電流ですか？」

「そう。$\rho_p$ は分極による誘導された電荷密度だね。これが動く時は分極電流 $\boldsymbol{i}_p$ を考える。電荷が動けば電流になるというのは変わらないからね。連続の方程式を満たすよ。ただ磁化電流 $\boldsymbol{i}_m$ は発散が 0 だから、これに対応した電荷密度はない」

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{i}_f = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{i}_p = 0 \tag{4.10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i}_m = 0 \tag{4.11}$$

「じゃあ磁化電流ってぐるって回るんですね！　止まることなく！」

「……それと電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ には、どんな関係があるんですか？」

「ふむ……ここまで話すつもりはなかったけど。分極ベクトルと磁化ベクトルをこんな風に定義してやる」

$$\rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{4.12}$$
$$\boldsymbol{i}_m = \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{4.13}$$

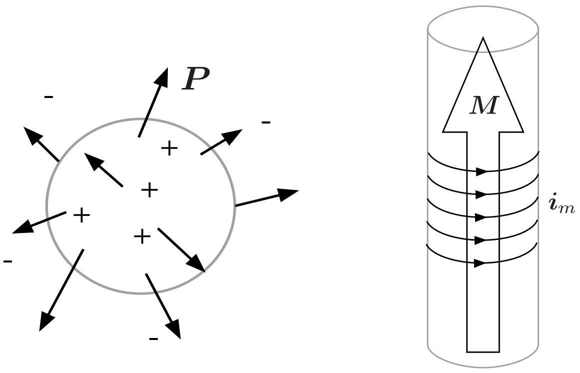


図 1　誘導電荷密度 $\rho_p$ と分極ベクトル $\boldsymbol{P}$。磁化電流密度 $\boldsymbol{i}_m$ と磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$

式を書かれたら意味を考える。外向きに分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ があるとしたら、内側の電荷はマイナス。つまり $\boldsymbol{P}$ の方向にプラスがあるのだろう。根元はマイナス。

もう一つ $\boldsymbol{M}$……磁化ベクトルか。磁化ベクトルがあったとして……周りにぐるっと、電流ができていると見るべきか。ストークスの定理で。

「それで、厳密な電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ の定義は、こう」

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{4.14}$$
$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \tag{4.15}$$

私は Maxwell 方程式をもう一度見る。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.16}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{4.17}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4.18}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{4.19}$$

……じっと眺めれば少しわかってきた。どうやらこの式に使われている $\rho$ や $\boldsymbol{j}$ とは、自由電荷だけを見ているのだ。伝導電荷と言っていいかもしれない。自由に制御できる電荷や電流だけを踏まえた Maxwell 方程式と読める。

　ん？　今、私……読めた？
　この式の意味が……心が。
「$\boldsymbol{P}$ や $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ に比例する……としたら、ちゃんと誘電率や透磁率を考えることができる。ただ、比例しないこともあるらしいけどね。ごめん、正直なところ私はあんまりこれを説明できないや」
　春さんの話を聞き流しながら、私は式を見つめる。数週間前まで遠く手が届かなかった式。だけど今は、理解できている。意味がわかっている。
　数式をそっと、人差し指で撫でた。

## 4.5　幕間

　もう時間、ということで私たちは身支度をして帰ることとなった。春さんも同じく電車に乗るということで、私と春さんの二人で駅に行くことになった。
「あかり、どうかしたの？」
「……ちょっと、図書館に寄る」
「何か借りるの？」
「……いろいろ。調べたいことができた」
　と言って、あかりは一人で図書館に行ってしまった。
「春さん、その、ありがとうございました」
「ん？　ああ、いいっていいって。こちらこそありがとう。いい勉強になったよ」
　私たちは地下鉄のホームまでやってきた。同じ方向の電車を待つ。
「でもやっぱり凄いですね……Maxwell 方程式」
「確かにね。でも、凄いのはここからだね」
　春さんを見る。電車はまだ来ない。
「相対論。磁場を横切ると電場になる。特殊相対論……大学では、相対論の講義で電場と磁場がどうやって変換されるか教わるよ。ローレンツ力も少しだけ見栄えが変わる」
「そうなんですか」
　相対論……私の知らないことだ。いや、時間が伸び縮みするとか、空間が伸び縮みするとかいった話は聞いたことがある。でも私にとってそれはお伽話でしかない。科学として見ることはできていない。私にとってそれはまだ物理ではない。
　春さんは知っているのだろうか。相対論。口ぶりから察するにある程度は勉強しているんだと思う。
　……いいなぁ。
「あおいちゃん、その辺勉強するつもりある？」

「やりたいですけど……でも難しいですよね？」
「んー。そうだなぁ。曖昧、複雑、無知……複雑であるというのは確かだけど、それって『知らない』が大きい気がするな。私も含めてね。あんまりよくわかってないから」
「知らない……そうですね。確かに」
「あっ、光速の導出忘れてた……ごめんね、あおいちゃん。Maxwell 方程式から実は光の速さがわかるんだよ」
「えっ？　そうなんですか？」
　電磁気と……光？
　光は 1 秒間に地球を 7 周半する……という話は聞いたことがある。だけど、電磁気と関わってくる……のか？　確かに電球は電気で光るけれど。
「Maxwell 方程式は電磁気現象を支配するからね。ただやっぱり相対論をやらないと Maxwell 方程式を正当化できないんだよね……さっきも言ったように、見ている人がどう動いているかで電場や磁場は変わるから」
　難しい話だ……複雑なものでもあるし、何より私が知らないのだ。
　でも……知らないと Maxwell 方程式を信じられないのか？　だとしたら学ばないといけない。
「あの」
私は知りたいと望んだ。望みを叶えたいと思った。だから、そのために行動したい。
「春さん。今から本屋に、行きませんか？」