あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 4 電磁場と力学

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

1　電磁波

1.1　光の正体

週末を春さんの大学での勉強に費やし、その翌週。

月曜日。

私にとって物理の授業は少し奇妙なものとなった。授業でやる内容に Maxwell 方程式なんてものはない。Maxwell 方程式に必要だった物理はすでにやってしまっている。退屈といえば退屈だ。

だから私が物理の授業中にやっていたことは、『これは Maxwell 方程式からどう説明されるか』ということだ。ただ、一部だけ切り取れば単純なものや、頑張ろうとしたら微分方程式を解く必要があって……と、私には頑張れないものが多かった。

そして物理の問題で Maxwell 方程式を考える必要のあるものは、実は少ないのだとわかる。だって、

……物理の課題を Maxwell 方程式から解くのはやめよう。

「…………ふぅ」

課題を解き終わり、物理室の天井を見る。昨日はあの後電磁気の本を 1 冊、春さんに勧められたものを買った……けれども、学校用のカバンに入れてくるのを忘れていた。

「はぁ……」

力不足だなぁ、と思う。

先週、あかりに数学を教えてもらって、週末は春さんから Maxwell 方程式を教えてもらった。先月までの私では考えられなかったことだ。あかりと出会わなければ……私はこのことを知ることすらできなかった。春さんに教えてもらわなければ、私は何もできなかった。

春さんからはお礼なんていらないと断られてしまったけれど……でも、あかりは誕生日プレゼントを欲しがっていた。そうだ、それも考えないとなぁ……。

――でも、本当に大切なのは物品ではない。私が、2 人から学んだことを活かさないと……教えてもらったことは使っていかないと意味はない。

「…………」

ただ、肝心の教えてもらったことを活かす場所が見つからない。

手持ち無沙汰に教科書をパラパラとめくる。力学から始まって、熱の分野があった。その次が波……波長、振動数……光と水面、か。こういう現象も、全て電磁気によって支配されているのだろうか。原子と電子も、電磁気によって支配される。

この世界はほとんど、電磁気によって支配されていると言えよう。もっとも、複雑すぎて私には解けないのだけど。

……物理室の中から窓の外を見る。夕日が室内を赤く貫いている。凝らして見ると目がくらんでしまう。この光は……光は。

光は電磁気によって支配されるのか？　電荷もない、質量もない、光の正体は……

「電磁波……！」

では、なかったか？

そうだったはず。電磁波と呼ばれるものがあったはず。電子レンジ？　マイクロ波？　波なのか？　波なのか！

あかりの方を見る。あかりは早々に宿題を終えて、どうやら数学の本を読んでいるようだった。確か、図書館で何かを借りるとか言っていなかったか。あかりはあかりでとても頑張っている。

電磁波、波……波？

私はノートに向かい合う。

1.2　振動して伝播する電磁場

どうやって波のような電場を考えればいいのだろう？　波というのは……例えば、水面に生じる波で考えてみよう。

水面波は、水位の上下運動が伝わる現象だ。上下運動を振幅として、位置や振動数が三

角関数の中に入る。式で書けばこういう場を考えているわけだ。

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) = A\sin(kx - \omega t) \tag{1.1}$$

この y というのが波の高さだ。これは時刻 t、位置 x での波の高さを返す。この波の特徴としては、波長が λ で、振動数が f ということが挙げられる。あと振幅は A。

確か、$v = f\lambda$ という公式が成り立っているのだっけ……v は波の速さだ。これは三角関数の中身が固定されたときを考えればいい。

あ、そういえば、波数と角振動数ってものもあったっけ。波数 k の定義式は $k = 2\pi/\lambda$ と $\omega = 2\pi f$ ということだったから、三角関数の中身はかなり簡単になる。

さて……これを電場にするわけだが、どう考えればいいかな。振動する電場……『振動する』というのは三角関数に任せてやればいいだろう。ということは、振幅 A を、ある方向を向いた電場……$\boldsymbol{E}_0$ としたらどうだ？　そうすると、電場は……

$$\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{E}_0\sin(kx - \omega t)$$

……というのにすれば、どうだろうか？　あっ！　位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で書くべきだった！

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\sin(kx - \omega t) \tag{1.2}$$

こうすれば、Maxwell 方程式で考えることができる！　……問題は、こんな波打った電場があるのかってことだけど……本当にこれが『電磁波』なのか？

まあ、まずは Maxwell 方程式に代入してみよう。発散を取るんだった。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = kE_{0x}\cos(kx - \omega t) \tag{1.3}$$

「これは……」

確か、電荷密度を表しているんだったな。でも、電荷密度が振動する……そんな状況は考えづらいな。せめて電荷は一定であってほしいな。空気中だとしたら……電荷は釣り合っているだろうから、$\rho = 0$ と仮定して良いかな？

そうなると、$k = 0$……は流石にないか。じゃあ……$E_{0x} = 0$ か？　ということは……『波の進行方向に電場はない』ということになる。x 方向……波の進行方向には電場は振動しない、ということなのか？　進む方向に対して、垂直にしか振動しない……

「横波……！」

ということなのか！　横波というものの意味は、そういうことなのか！　進行方向に振動しない！　進行方向に対して、必ず垂直な面で振動する！

「おっと、ここで $\rho = 0$ を仮定してる……えーと、次は……」

マクスウェル方程式の中で、この他に電場だけで完結している式はない。あとは磁場を考える必要があるけれど……さて、どんな磁場がいいだろうか？

これもまた、電磁波なのだから……x 軸方向に進んでいく磁場を考えるのが妥当だろう。……これも、サイン波になるのだろうか？

まずは計算してみよう。電場の回転をとってみて……

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0z} \\ E_{0y} \end{pmatrix} k\cos(kx - \omega t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

この方程式を解けばいいのか……ん？　これ、成分で見ればもう解けるのでは？　それぞれの成分で書くと、こうなっているのか

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{0x}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial B_{0y}}{\partial t} &= E_{0z} k\cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial B_{0z}}{\partial t} &= -E_{0y} k\cos(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

もともと、$\boldsymbol{E}_0$ というのはある方向を向いた決まったベクトルとしていたのだった……なら、この式の両辺を t で積分して……積分定数は無視していいかな？　そうすると、

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0z} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \frac{k}{\omega}\sin(kx - \omega t) \tag{1.5}$$

となる。うん。これも確かに x 軸の方向へ進んでいる。電磁波の『磁』のほうというわけだ。磁場は、これでいいのかな。

これの特徴を見ていこう。まず、簡単にわかることだけれど $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ だ。それと、Maxwell 方程式にはもう一つ式があった。これの回転を取るのだ。

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0y} \\ -E_{0z} \end{pmatrix} \frac{k^2}{\omega}\cos(kx - \omega t)$$

よし、計算できた。ちょうど電場での y, z 成分がそれぞれ y, z 成分に出てくるんだ……ああ、当然か。磁場の回転は、電場の時間微分だったはず。ええと、確か Maxwell 方程

式は……

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{i}$$

という形だった。ええと……電流があったら考えにくそうだな。$\rho = 0$ だし、$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ でいいか。となると……あれ？　そういえば電場の形はもう決めていたな。微分すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0y} \\ -E_{0z} \end{pmatrix} \omega \cos(kx - \omega t) \tag{1.6}$$

「ええと……ということは、$k/\omega = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$？」

　k と ω はそもそもなんだっけ。波数と、角振動数……振動数はまあわかるが、波数というのは……2π メートル内に幾つの波があるのか、ということか。角振動数が 2π 秒に何回振動するか、という量であったから……いや、式で考えよう。

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{f\lambda} = \frac{1}{v}$$

　速さの逆数……？　つまり、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{1.7}$$

となるのか。

「んー……？」

　なんか、うまい感じで波の式が出てしまった。そして、この速度は……定数？

1.3　電磁波の性質

　私は式を並べて書く。電場と磁場が x 軸方向に進行する。そのときにどのような電場や磁場が許されるのか……まあ、かなり適当に考えたから、正しいかどうかはさておいて……だが、うまくいってしまった。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} \sin(kx - \omega t) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0z} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \frac{k}{\omega} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

この 2 つの電場と磁場の式は、マクスウェル方程式を満たしている。……少なくとも、$\rho = 0,\ \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ の時は。つまり、電荷や電流の全くない、まっさらな空間を考えているわけだ。真空……ということか。空気中も真空と考えれるんだろうか。原子や分子の間隔はかなり広いと聞いたことはあるけれど……

そして、もう一つ式が出てきた。それがこの式だ。

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{1.9}$$

この式は何を言っているのか。波数と振動数、そして速さの関係……ここでいう速さは波の速さ、電磁波がどのくらいのスピードで x 軸方向へ進んでいくのか、ということ。そして……それはどうやら、真空の透磁率と誘電率に関係しているようなのだ。

「真空の、ってこういうことなのかな……」

それはともかく。

問題は、これは定数だったはず、ということだ。真空の誘電率はコンデンサーの電気容量を調べれば測れるだろう。そして、透磁率は完全に定数だったはず……ちょっと調べてみよう。

$$\varepsilon_0 = 8.854\ldots \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)} \tag{1.10}$$
$$\mu_0 = 1.256\ldots \times 10^{-6}\ \mathrm{N \cdot s^2/C^2} \tag{1.11}$$

……そうだ！　この積をとれば、単位が $\mathrm{s^2/m^2}$ になる！　この積と、ルートの逆数。

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \tag{1.12}$$

となる！　うん、確かに速さだ！　……でも、かなり速いな。一秒間に 3 億メートル……？

「あ、光か！」

今考えているのは『電磁波が光なのか』という問いだった！　地球の一周の長さが 4 万キロメートルということだったから、『1 秒間に地球 7 周半』という速さはどうやら正しそうだ！

「おお……」

ひとまず、速さについては納得した。空気中でも同じようなものだろう。さて、ほかにも特徴はないのか？

まずは『電磁波は横波だ』と言うことはできるだろう。電場や磁場の振動が伝わっていく。しかし、その振動には制限がある。それが『進行方向には振動できない』ということ。……電荷があるときにどのようになるのかはわからないけれど。

あと何があるかな……あ！　光といえば色だ！　色というのは波長なのだっけ？　光の

波長が長いほど赤くなって、短いほど紫になって行くのだっけ。でも速さが一定なら波長と振動数には制限がつく。

$$f\lambda = \mathrm{const.}$$

という制限だ。つまり『波長が長い光は振動数が小さい』『波長が短い光は振動数が大きい』。波長が決まれば振動数が決まる。振動数が決まれば波長も決まる。

あ、水面の波と似てる。早く振動させれば波長は短くなる。お風呂でよくやることだ。ん……となると、光の発信源も、電場をなんらかの方法で揺り動かしているってことなのか？　どんなメカニズムなのだろう。

そういえば、赤外線はあったかくなって、紫外線はダメージが大きいというイメージがあるな。X 線とか γ 線とかは波長の短い電磁波なんだっけ？　その違いはどこから来るのだろう？　光がゆらゆらとこっちにやってきて……皮膚に当たる。目に入る。この時……分子が、細胞の中の分子が電場で揺らぐのだろうか？

「ふぅーん！」

色々考えてしまう！　『光は電磁波であるようだ』ということがわかっただけで、本当にいろいろ！　でも、本当だろうか。私の持っている電磁波に対するイメージと、Maxwell 方程式の語る電磁波は、同じものなのか？

……そうだ。Maxwell 方程式を電場のみの式、磁場のみの式にできないだろうか？　数学を使えば、できそうだ。

1.4　波動方程式

まずは Maxwell 方程式を全て書き表そう。真空中を考えることにすると……

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= 0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0\\ \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

この 4 つだ。さて……これを $\boldsymbol{E}$ だけの式と $\boldsymbol{B}$ だけの式にしたい。そうだなぁ……3 番目と 4 番目の式をうまく使えば良さそう。例えば、4 番目の式をさらに時間微分すると……

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})$$

回転の回転！　……ええと、そういえば先週計算していたはず！

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \triangle\boldsymbol{A}$$

ああ！　それで、1 番目の式を使えば……ほら！　できた！　……ああ！　同じ式が $\boldsymbol{B}$ の方にも使える！　よし。こうして……完成！

$$\triangle \boldsymbol{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.13}$$

$$\triangle \boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.14}$$

「ぃよし！」

かなり綺麗な式になった！　……けれど、これ 2 階微分しないといけないのかぁ。一般的に解くのは大変そうだな……今の私にはできそうもない。

「……ねぇ、あおい」

「わぁ！　あかり……」

急に、隣で勉強していたはずのあかりが話しかけてきた。何かあっただろうか？

「今日は特段、独り言が多いね」

「あ、ごめん……ついテンション上がっちゃって。って、『特段』ってどういうこと？」

「……いつも以上、って意味」

「私そんなに独り言多い！？」

あかりは黙って首肯する。私は羞恥に襲われる。

「いいんだけど……何やってたの？　……へぇ、波動方程式か」

ノート覗き込んだあかりの髪が手に触れる。反射的に手を引っ込める。

「え？　この式に、そんな名前がついてたの？」

「そうだね。……この式は電磁場についての波動方程式か。他にも弦についての 1 次元の波動方程式、膜について 2 次元の波動方程式がある」

「弦、膜……水面とかも膜って考えられるのかな」

私とあかりは数秒の間思考する。例えば水槽。例えば海。例えばお風呂。例えば……

「そんなに単純ではないと思うけど……でも、近似的にはそうなのかもね」

「近似的にかぁ。まあ、これも『ほとんど真空中』って近似をしているからなぁ……」

春さんの講座を思い出す。確か、真空でなかったら $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ ではなく $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ で表した方が良いのだっけか？　それで、無視できない電荷があったら……どうしよう？　それはまた別の問題なのか？

「あ、それで、波動方程式ってことは波の式なんだよね？　何か知っていることない？」

「そんなには知らないけれど……その波動方程式は速さ $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で伝わる、3 次元中のベクトル波を表している。とは言えるかな。$\omega = c|\boldsymbol{k}|$ だから……これが一般解になる」

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \int d^3\boldsymbol{k}\ (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - c|\boldsymbol{k}|t) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - c|\boldsymbol{k}|t))$$

あかりは黒板にそう書いた。サインやコサインが現れている。えっと、$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - c|\boldsymbol{k}|t =$ 一定 となるのは……速さが c となるということだ！

「速さ……！　じゃあやっぱり、電磁波なんだね！　これが！」

「うん。$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})$ は積分可能な関数としてね……連続だから大丈夫だと思うけど……うん。電磁波と言って、いいかもしれない」

この波動方程式を満たすから、電磁場は波として振る舞う……そして、その速さは $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ だ！

「光速は $c = 299792458$ m/s だったはず。『難く泣く、2人読む子や』って私は覚えてる」

「難く泣く 2 人読む子や……なんか……いいね！　だいたい 3×10^8 かその速さで電場と磁場が伝わってくるんだね！」

「波動方程式より、Maxwell 方程式の方が制限が強い」

「その速さで光が伝わっていく……Maxwell 方程式から波動方程式が導出できるんだ！　そっか……それが、電磁波なんだね！」

1.5　秒速 299792458 メートル

時計を見る。予想以上に進んだ時計の針を私は二度見する。まだ外は明るいのに、もう下校時刻に近くなってしまっている。

「まだ明るいけど、もうすぐ下校時間だね」

「ん……そうだね」

もうすぐ夏がやってくる。日は長くなり、夕焼けの時間は遠くなる。勉強に集中しすぎては下校時刻をオーバーしてしまいそうだ。

「光は電磁波……かぁ」

「……あおい？」

あかりはこちらを見ている。私は窓の外の太陽を見つめる。

「秒速 299792458 メートル……そんな速さで私たちのところに、太陽から電場と磁場がやって来ているってのが……なんだか信じられなくて」

「……ほぼ一瞬。計測するのは難しいでしょ」

「そうなんだろうね」

けれど、それを測る方法はある……光の速さを『一瞬』と形容しない方法が。

だから、秒速 299792458 メートル。確か……メートルという単位はこの光の速さで決まっているんだった。光の速度は、変わらない……らしい。

そして……この世界が止まった時、光も止まるのだろう。

そんな世界では、何も見えないのかもしれない。

　光がやってこない限り、私たちには何も見えない。

　この太陽も。

　あかりの姿も。

「そういえば、太陽から出た光って 8 分後くらいにようやく地球にたどり着くんだっけ？」

「……さあ、よく知らない。けど、何万年も前の星の光が地球にたどり着いているって話は聞いたことがある」

「星……」

　そうか。今は見えないけれど、夜になれば星が見える。何万年もかけて、地球に向かってやって来る。光。

　光の正体は電場と磁場。

　ゆれ動きながら宇宙を駆ける電場と磁場が、

　文字通り、

　光の速さでやって来る。

「…………！！」

　秒速 299792458 メートル。

　星の表面で揺れ動いた電磁場が、宇宙空間を光速で駆け抜け、私たちの目に届く。

　それは星だけではない。光は反射する。それも電磁場の振動が伝わるのか。太陽から照らされた私たちが、私には見える。

　電場が、磁場が。

　私の四方八方からやって来る。

　これまでも、これからも。

　私の目は、電磁場を知っている。

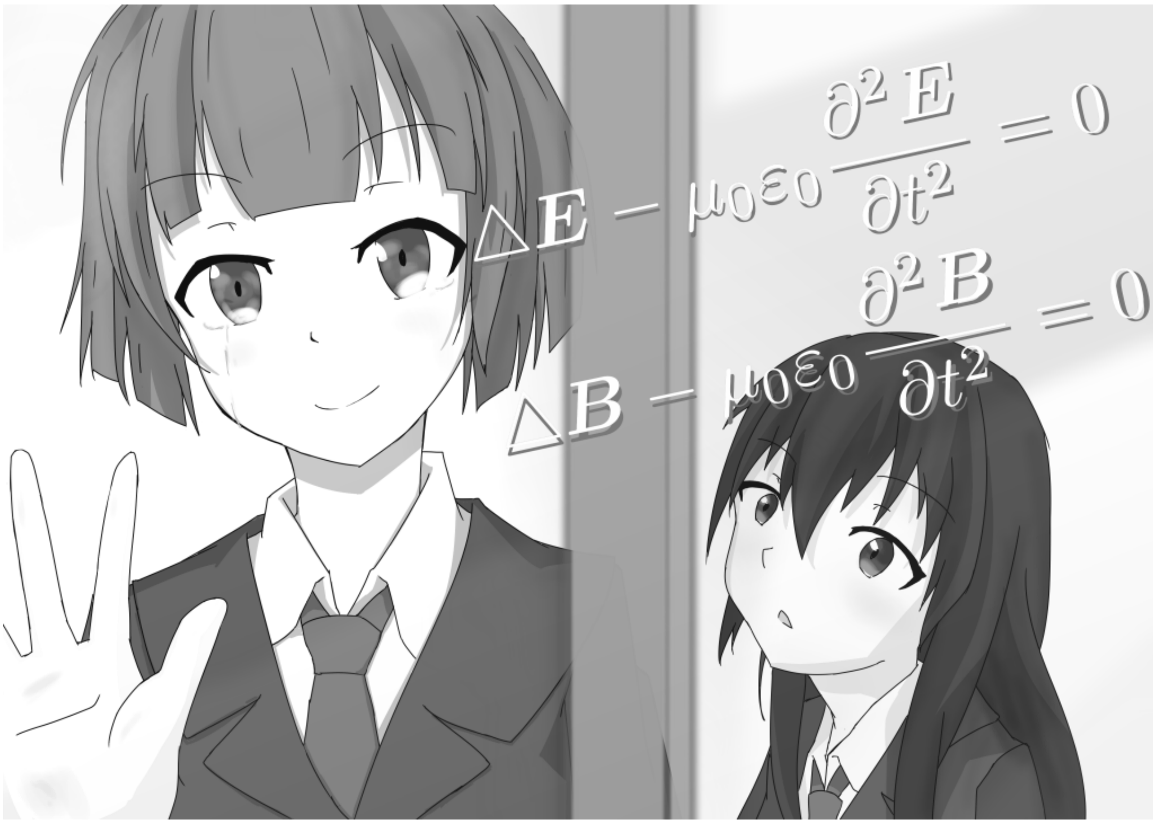
$$\triangle \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\triangle \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

　私の心は、電磁場を感じている。

　心に浮かんだその式が、世界に溢れている。

　私は物理を感じている。



「……あおい？」
私は気づけば、涙を流していた。