あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 4 電磁場と力学

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

2 電磁場のエネルギー

2.1 オームの法則

翌日、火曜日。物理の授業中。

私は Maxwell 方程式をいじっていた。いじっていたと言っても、昨日導出した電磁波の方程式が正しいのかどうか。それとあかりの言っていた解が本当に解になっているかどうかの確認をしていた。

……昨日のことを思い出す。どうしてあそこで涙を流したのだろう。私は。特に泣く理由はなかったはずだ。あれは……そう、私の感情とは関係なく、涙が零れてしまった。ただそれだけだ。

感動した——から、だろうか。

確かに、あの時私は、世界との繋がりを感じた……物理という道によって世界と繋がった。そんな気がしたのだ。人に話したら笑われるかもしれないが……私の心はそこまで昂ぶったのだ。

あかりには……隠せただろうか。

黒板を見る。板書はさらに進んでいた。黒板の大事そうなところだけ、私はノートに書き写す。電磁気の分野もだいぶ進んでいる。今やっているのはオームの法則だ。
「電流と電圧の関係……」

$$V = RI \tag{2.1}$$

よく使う式だ。問題を解くときに。黒板ではその問題の解説が行われている。

……そうだ、これを Maxwell 方程式を使って解釈できないだろうか？　確か、電圧と電流の定義は電場と電流により書かれていて、こう……だったはずだ。

$$
\begin{aligned}
V &= \int_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \\
I &= \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

「ん……」

$V = RI$ だから……つまり電場と電流には何らかの関係があるということか？　電場はあくまでも力の場だったはず。電流は $\boldsymbol{i} = \rho\boldsymbol{v}$ だから速度の場だ。力と速度。この二つは違うもののはずだ。

……でもまあ、関係しないということはないか。電磁気の本をカバンから取り出す。昨日は家に忘れてしまったものだ。この式に関係するものはないか、ぱらぱらとめくってみる。　すると、このような数式があった

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i} &= \sigma\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{E} &= \rho\boldsymbol{i}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

「電気伝導率……と、抵抗率」

それぞれ逆数の関係になっている。電気伝導率 σ が大きほど……電流は多く流れる。そして電気抵抗率 ρ が大きいほど、電流は流れにくい。名前の通りというわけだ。

ではこれを……どうしようか？　$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{i}$ の向きは同じで一定だし……ん？　同じなら、その大きさだけ比べることはできないか？

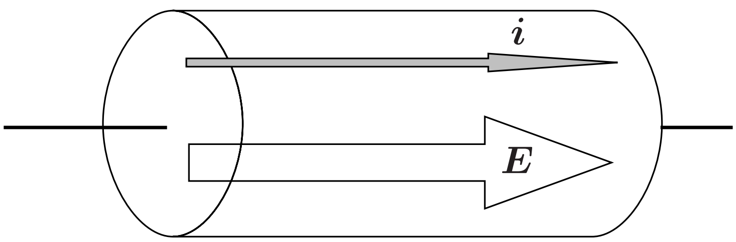

図 1　長さ L、断面積 S の抵抗（モデル）

こういう円柱を考えて、その長さを L、断面積を S とする。……電流の方向への法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ としよう。すると、$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = E = V/L,\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} = i = I/S$ になる。積分は単純に、長さや面積をかけるだけになっている。

$$
SV = \rho LI \tag{2.4}
$$

こんな感じか？　とすると……抵抗 R は $V = RI$……つまり $R = V/I$ だから、

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\sigma S} \tag{2.5}$$

こんな感じで書けるわけだ。……うん。本に書いてある通りだ。長さに比例して、太さに反比例する。

「ん……」

ひとまず計算してみたけれど……本当にこれでいいのか？

電圧というのが電気的な仕事であることはわかっている。だから線積分の形で書くということも。電圧というのは、ある線に対して定義されるものなのだ。曲線に対して、電圧が定まる。

電流は面だ。面に対して電流の大きさが定まる。

……となると、この $V = RI$ って式は柱状の抵抗にしか成り立たないということかな。

2.2　電力

そんなことを考えていると、黒板ではジュール熱を計算していた。

オームの法則に加えて、ジュール熱による電力というものがある。電圧 V の抵抗に電流 I が流れる時に発生するジュール熱の電力は……$P = IV$。P は Power の頭文字らしい。t 秒間に発生するジュール熱は

$$Q = IVt \tag{2.6}$$

となる。Q はジュール熱。熱量の単位 J（ジュール）を持つ。

「エネルギー……」

エネルギー、仕事、熱。全てジュールという単位を持つ。全て同じものなのだ。ならば……電気的な力によるエネルギーか……？

これも Maxwell 方程式からなんとか考えられないものか。

仕事が $W = Fx$ だっけ？　いや、ベクトルだから $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}$ だ。熱量が単位時間あたりの仕事だとしたら……$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ だっけか。電流と関係するのは……$\boldsymbol{i} = \rho \boldsymbol{v}$ だっけ。これは電流密度か。

本を見ると、微小領域 ΔV に生じる電力は

$$P = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i} \Delta V \tag{2.7}$$

ということらしい。$\boldsymbol{F} = \rho\Delta V\boldsymbol{E}$ だから、それに $\boldsymbol{v}$ をかければいいのか。単位体積あたりの電力は $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$ になるわけだ。

$$P = \int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}\,dV = \int_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S}\int_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = IV \tag{2.8}$$

体積を $S\times L$ と考えたけれど、なんか、納得いかないなぁ。本当っぽいし、本にも書いてあるけれど……

他に考える方法はないかな？　電流が抵抗を流れる……流れて、電荷は……電場を駆け落ちる。あれ？　そうなると加速されるのではないか？

もう一度考える。電荷が電場によって、加速される……しかし、電流は一定だ。となると……逆方向の加速がある！　つまり、抵抗があるということだ。

「そうか……」

あくまでも $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$ は電流が受け取るエネルギーだ。そして、そのエネルギーは……抵抗により奪われてしまう。そのエネルギーが、ジュール熱として出て行くのだ！

2.3　ソレノイドコイル

物理の授業は終わった。ぞろぞろとみんなが机から離れ、昼食に向かっている。私も早めにあかりのところにいかないと。でもそれより、次のページに書かれていることが気になった。

$$V = -N\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.9}$$

この磁束 Φ は磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の面積分だった。それで電圧 V が電場 $\boldsymbol{E}$ で表せるんだった。そこから Maxwell 方程式を導いたんだった。ただし、この巻き数 N というのが気になった。

「……コイル……ソレノイドコイルか」

何回か、磁石と同じようなものだということで考えていたけれど、実際に詳しく計算はしていなかったな。……無限に長いソレノイド？

「内側の磁場の大きさは $B = \mu_0 NI$ になる……」

教科書を読み上げてみた……本当だろうか？　μ_0 は今までと同じ、真空の透磁率。そして N は……単位長さあたりの巻き数？

「……どうやればいいんだろう」

「どうかしたの、あおい」

　と、あかりが話しかけてきた。片手には弁当のバッグを持っていた。いつもは私があかりの教室まで行って食べに行くのだ。遅くてこっちまで来たのだろう。
「ああごめん、ちょっと気になってて」
「どれ？」
「この、無限に長いソレノイドコイル内の、磁場。電流が磁場を作るってことはわかるんだけど、どうやって計算すればいいのかわからなくて」
「……ふむ。やっぱり、アンペールの法則を使えばいいんじゃない？　電場の時間変化しないから、Maxwell 方程式はこうなるし」

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} \tag{2.10}$$

「ああそっか。ん……そこから面積分するんだよね。どうすればいいかな」
「……さあ。磁場の概形はどうなってるの？」

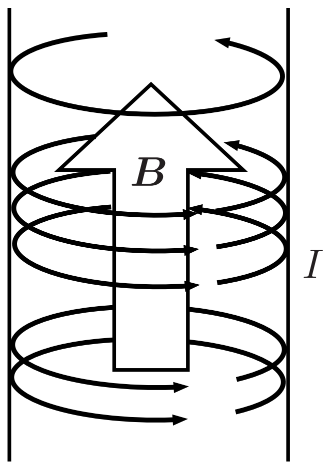

図 2　コイルの中を通る磁場

　私はノートにぐるぐるとコイルを書いて、そこに生じるであろう磁場を書き込む。
「……こうかな」
　あかりは私の図を確認する。
「ソレノイドコイル内に、磁場が……誤解を恐れずに『流れている』って考えて良さそうだ。無限に長いから外に向かうことができなくなっているのか」
「あ、外側の磁場はないってことでいいよ。……磁場の線積分ってことは、磁場にそった線が積分する経路になるわけだよね？」
「そうしたい。……こうとかは？」

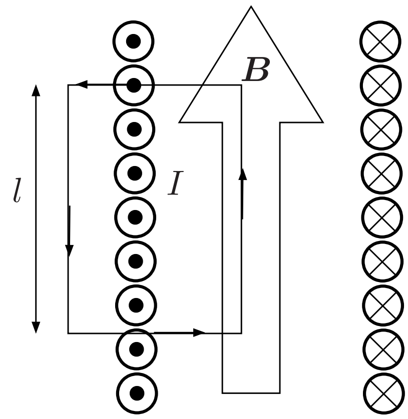

図 3　コイルの断面

　あかりは私の手からペンをとって、図に書き込む。
「……断面か！　そっか、この方向だから……じゃあ、どうなるかな？」
　私は計算を始める。あかりはお弁当を開けて、食事を始める。
「えっと……」

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.11}$$

　まず、左辺を考える。おそらく効果があるのは内部の、磁場に沿ったところだけ。それ以外は磁場と垂直だったり、外側では磁場がないんだった。となると、磁場の大きさを B として……ここの長さをとりあえず l にしよう。すると左辺は Bl になる。
　次、右辺！　これは積分路に囲まれた部分を通る電流を考えればいい。ええと……このソレノイドコイルには電流 I が流れている。つまり、I……に、この導線の本数をかければいいわけだ。するとどうなるっけ……あ、単位長さあたりの巻き数 N！　ということは l だけの長さには lN 回だけ巻かれている。じゃあ、右辺は $\mu_0 lNI$ ということになる。つまり、

$$\begin{aligned} Bl &= \mu_0 lNI \\ B &= \mu_0 NI \end{aligned} \tag{2.12}$$

「できた！」
　あかりが私のノートを覗き込んでくる。ひとつひとつ見て行って、確認しているようだ。
「うん、問題ないと思う。……ただひとつ気になることがある」
「何？」
「電圧……起電力だっけ。どっちでもいいけれど……コイルにを貫く磁束が変化すると、起電力 V が生じる。それが電磁誘導の法則だった。でも、そのコイルには電流 I が流れ

ている……そうしたら、電力 $P = IV$ ができるんじゃない？」

あかりは電磁誘導の法則を指差す。

$$V = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

……ん、確かに……$P = IV$ というのはさっき授業中にやったことだ。これに I をかければ確かに同じ式にはなる……

「ってことは $P = -Id\Phi/dt$？　あっ、I だけの式にできそう。えっと……」

$$P = -I\frac{d}{dt}BS = -\mu_0 NSI\frac{dI}{dt} \tag{2.13}$$

「こう、かなっ！？」

「……電力は仕事率。仕事率はエネルギーの時間微分。だから……」

$$P = -\frac{\mu_0 NS}{2}\frac{d}{dt}I^2 \tag{2.14}$$

あかりの導出した式は正しそうだ。これはどういう式だろうか……？

「ん、となると……電流が大きくなると、電力は……減る？」

「逆に、電流が小さくなると電力は増えるね」

「あれ？　そもそも電力ってなんだっけ？」

2.4　電場と磁場のエネルギー

議論が行き詰まり、私も弁当を取り出す。

「電力ってミクロで見ると $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$ だったんだよ。つまり『電流が受ける仕事』……仕事率だね」

「ふぅん、じゃあコイルに流れる電流が増えると、その電流はエネルギーを失うんだ」

確かに。$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$ は単位時間に電流が受け取るエネルギーだ。電磁誘導で生じる電場 $\boldsymbol{E}$ は電流 $\boldsymbol{i}$ の増える方向と逆向きなのだから、その内積はマイナスになる。つまり、電流が増えるほど電流の持つエネルギーは減少する。

「その、電流の失ったエネルギーはどこに行くの？」

「え？　あ、確かにエネルギーは保存するから……」

どこに行くのだろう。電流の中にある電荷は電場によって進行方向と逆向きに力を受ける。つまり速度が小さくなり、エネルギーは失われる。

「いや待って、そもそも電場から力を受けるって、エネルギーを受け取ってるってことだよね？　そのエネルギー、どこから来たの？」

私がそう言うと、あかりは手を口元に寄せる。
「……確かに。電場で電荷は力を受ける。けれども速度を持つにはエネルギーが必要」
「電場で考えるとしたら……コンデンサーとか？　極板同士をつなぐと、プラスがマイナス側に、マイナスがプラス側に行く。運動エネルギーができるね」
コンデンサーにもエネルギーを考えることができたはずだ。ええと、確か……

$$U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S} \tag{2.15}$$

「こうだっけ？」
「そう。……コイルにもエネルギーが溜まってたりしない？　電流を一定流しておけば、それを減少させるときに電力を生じるから」
「ん……？　ええと……」
「電力が『溜まっているエネルギーの放出』なら、こう書ける」

$$P = -\frac{dU}{dt} \tag{2.16}$$

「……あ、そっか。溜まっているエネルギーが減るってことは、外側にエネルギーが出て行くってことだから。じゃあ、ソレノイドコイルのエネルギーは」

$$U = \frac{\mu_0 NSI^2}{2} \tag{2.17}$$

「って書けるわけだ」
「そういうことだね……でもこれをどう解釈しようか」
問題はそこだ。勝手にこの 2 つをエネルギーと考えたけれど、物理的なものがこの式にあるのだろうか。確かにエネルギーの次元にはなっているだろうけれど。
「電荷や電流があるだけで……エネルギーがある？」
「どうかな……静止エネルギーは特に関係ないと思うけど。でも……あっ、電場とか磁場とかにエネルギーが溜まっているってのはどうだろう」
私はそう提案する。
「……電場や磁場がエネルギーを持つ？　そんなことあり得るの？」
「あ、いやぁ、私も思いつきだからさ。よくわかんないけど……でも、これを電場と磁場に書き直してみたら、どうなるかな？」
「……いや、いい考えかもしれない。やってみよう」
コンデンサーの電荷 Q はコンデンサー内の電場 E で書くことができる。そしてコイルの電流 I とコイル内の磁場 B にも関係がある。そうすると、この U というのは、

$$U = Sd\frac{\varepsilon_0 E^2}{2},\ U = \frac{S}{N}\frac{B^2}{2\mu_0} \tag{2.18}$$

となる。
「S って……コンデンサーの面積、またはコイルの断面積か。d はコンデンサーの幅、コイルの幅は無限だけど、$1/N$ は……巻き数 1 つだけの幅か」

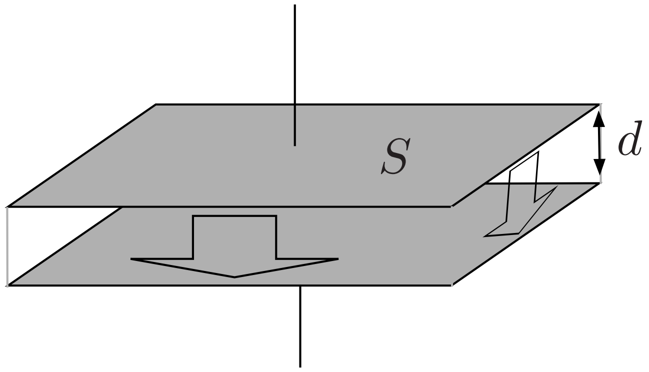

図 4　コンデンサー

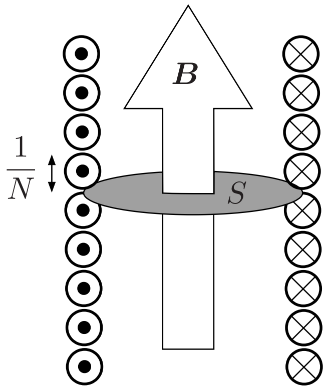

図 5　コイル

図にするとわかりやすい。$S \times d$ や S/N というのは、体積を表している。
「じゃあ……これがエネルギー密度になる、ということ？」

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},\ u = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{2.19}$$

あかりは小文字の u を使い、体積あたりのエネルギー……エネルギー密度を書いた。
「んんんん……そう、じゃないかな？」
正直、これがエネルギー密度です！　と言われて素直に受け取ることはできない。電場や磁場にエネルギーがある、と考えることはできるけれど……本当だろうか？
「どうやったら確かめられるかな」
あかりはしばらく考えて、私を見てこう言った。
「じゃあこれを微分して……電力 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i}$ が出ればいいんじゃない？」

2.5　Poynting の定理

「そっか！　その手があった！」と言って、お弁当を食べ終わった私は計算をする。このエネルギー密度……っぽいものを時間で偏微分すれば、$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i}$ が出てくるんじゃないか、ということだ。Maxwell 方程式を使って式変形して、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.20}$$

$$= \boldsymbol{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{i} \right) + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot (-\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{2.21}$$

$$= -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{2.22}$$

「出て来たよ！　$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i}$ が！」

「いや、この後ろの項を計算しないと……ベクトル解析の公式が使えそう」

$$\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) \tag{2.23}$$

「なんか見たことがある気がする……」

「やったよ。計算はそれほど難しくないけど」

「そうだっけな。この式は正しいんだよね。だったらこの項はなんなんだろう……」

電場と磁場。その外積……そういえば、電場と磁場を両方同時に考えることはなかった。どちらかが 0 なら出てこない項ではあるけれど……

「ん、一応この u が電場と磁場の……電磁場のエネルギー密度ってことでいいのかな」

「いいと思う。それとあおい、この $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ は逆にした方がいいかもしれない」

「どうして？」

「$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ の時を考えると、この式はちょうど」

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{2.24}$$

「……どうかしたの？　この式が」

「電荷と電流の保存式と同じ形になっている」

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{i} \tag{2.25}$$

「あ！　本当だ！　じゃあこの $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/\mu_0$ って、エネルギーの流れなのかな！？」

「えぇ……それはそれでどうかと思うけどね」

本を開き、該当する箇所がないか探る。すると、先ほどの式が出て来た。そして、このベクトルも。

「あった！　このベクトルだよ！　ポインティングベクトル！」

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{2.26}$$

「……エネルギー流密度の次元を持つ、か。確かにそうだけど……」
「積分したらこんな式が成り立つんだって！」

$$\frac{dU}{dt} = -\int_S \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{S} - \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i}\, dV \tag{2.27}$$

「確かに。けれど……本当にエネルギーの流れが、空中にあるっていうの？　導線の中を通るならともかく……電場と磁場が直交しているだけで、外積の方向にエネルギー流れがあるなんて」

2.6　エネルギー流としてのポインティングベクトル

あかりの疑問にどう応えたものか。電場と磁場がエネルギーを持つ、というのは頑張れば認められるけれど、エネルギーの流れも持つというのはどうなのだろう。

だけれど、確かに $\boldsymbol{i} = 0$……電流がないときはそう考えるしかない気がする。エネルギーがあったとして、それが移動するときには流れができるはずだ。当然。
「電場と磁場……か」

昼休み後の授業中に、そのことを考える。電場と磁場を同時に考えるにはどうすればいいだろう。電場は電位差があるところにできる。そして磁場は電流の周りにできる……つまり電位差があり、電流のある状況を考えればいいわけで……
「あ、抵抗……」

抵抗の中では電流に比例した電場ができているのだった。そして、電流の周りには磁場ができる。……電場と磁場が両方あるなら、ポインティングベクトルが考えられる！

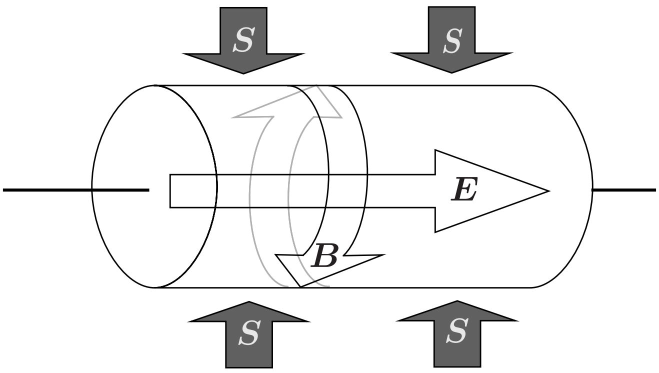

図 6　抵抗におけるポインティングベクトル

図から察するに……ポインティングベクトルは導線の内側を向く、？
「……？」

空間からエネルギーをもらっているということだろうか？　でも確かに、電池からエネ

ルギーをもらうことで抵抗は熱を持つのだから……

電池の方がどうなっているか。電池……いや、簡単のためにコンデンサーにしよう。コンデンサーの内部の電場が変化すると、磁場が周りにぐるっと回る。マクスウェルの変位電流だ。すると……図は……

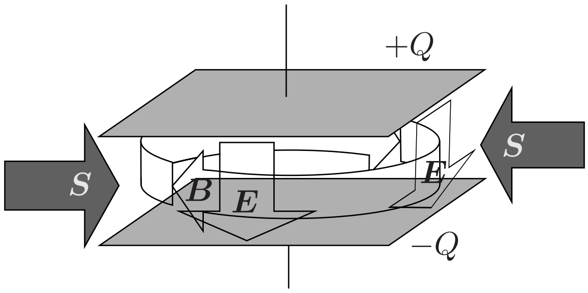

図 7　充電時

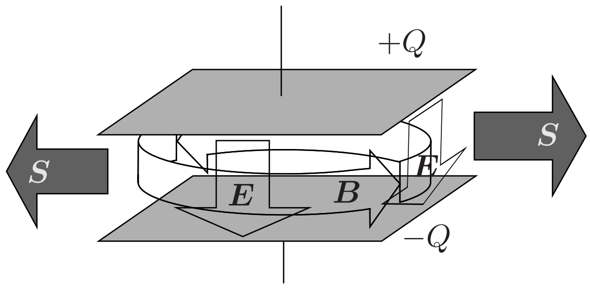

図 8　放電時

うーんと、放電時は外向き、充電するときは……電場が強くなる方向だから……内向き。つまり、ポインティングベクトルによってエネルギーが入っていく、出ていくと考えると……良さそうだ！

「ん……」

抵抗とコンデンサー。2 つのモデルで考えることはできた。他に例は……あるか？

あとは……ソレノイドコイル？　そうだ！　起電力！　つまり電場ができてる！

電流が増加すると、こっち向き。電流が減少すると、こっち向き。違う向きに電場ができる……

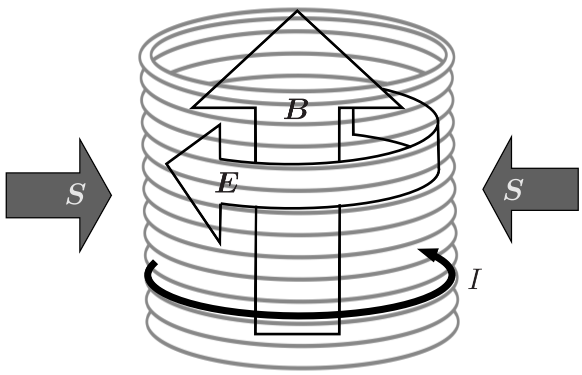

図 9　電流を大きくする

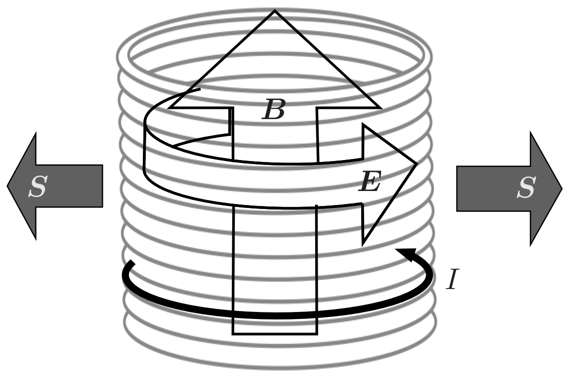

図 10　電流を小さくする

「お……」

電流を大きくしていくときは内向きに、電流を小さくしていくと外向きにポインティン

グベクトルが生じている！
　エネルギー流れという考え方は正しいのかもしれない！　それで、電場と磁場がエネルギーを持つということも！
　このこと、あかりに放課後教えよーっと！
　満足して、私は授業に戻る。ふと、昨日のことを思い出す。電磁波の時と、同じような感動が今の私にはあった。この式を導出できたことへの喜び、そしてそれが物理的な直観と合致しているという感覚！
　なんか、この感覚——クセになっちゃいそうだ。
　授業中だが、顔がにやけてしまう。もっと知りたい。好奇心！　楽しい！