あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 4 電磁場と力学

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

3　電磁場の運動量

放課後、いつも通り私とあかりは物理室へ。ポインティングベクトルについてわかったことをあかりに伝えた。

「へぇ、じゃあ意味がありそうだ」

「だよね。あ、そうだ。次はローレンツ力を考えてみようと思うんだ！」

私には算段があった。具体的な未来が見えているわけではないけれど、$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}$ という式があった。これをもう一度電場と磁場だけで考えることはできるはずだ。

「そうか。ローレンツ力……いいんじゃない？」

あかりはそう言って数学書に向き合った。

「…………」

昨日のこと、あかりは気づいたのだろうか、気づかなかったのだろうか。私にはわからない。けれど……もし、気づいていたとしたら。

「ねぇ、あかり……」

「ん、どうした？　あおい」

なんでもないように、あかりはこちらを向いた。呼びかけたはいいけれど、何を言えばいいのか、わからなかった。数秒の沈黙が訪れる。

「えっと……あ、今、何勉強してるの？　その本、教科書じゃないでしょ」

「うん。そうだね、分野で言えば解析学。その入門書だけど」

と、あかりは私に本の表紙を見せる。あかりはあかりでちゃんと勉強しているようだ。

私も、あかりに教えてもらったことを生かさなければいけない。そう思う。
　あかりは前に進んでいる。私も進まないといけない。
「……私もさ」
　あかりは言った。
「あおいの役に立てるように、頑張るから」
「えっ……？」
　あかりはもう、本を見つめてペンを動かしていた。

3.1　ローレンツ力の場としての表現

　あかりは何も言わない……私も、計算しよう。えっと……そうだ。まずは ρ と $\boldsymbol{i}$ を電場と磁場に書き直すんだ。

$$\boldsymbol{f} = (\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \times \boldsymbol{B} \tag{3.1}$$

　さて、どうしようかな……第 1 項はこれ以上なんともできそうにない。となると第 2 項……ん、$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ が出て来そうだ。これをまとめると……磁場の時間微分が出てくる。あ、電場の回転になるのか？

$$\boldsymbol{f} = \varepsilon_0(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.2}$$

$$= \varepsilon_0((\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \times (\nabla \times \boldsymbol{E})) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{3.3}$$

「……んー」
　なんか、異様に複雑になった気がする……でも電場と磁場の外積 2 連続のところが似てるな。……ん、$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ という式があったから、それを足したら同じ式になるのでは？
　電場と磁場で……そうなると

$$\boldsymbol{f} = \varepsilon_0((\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E}) \tag{3.4}$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}((\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{3.5}$$

　……だからなんだってんだ。こんな複雑な式……いや、似ているところはあるから、そこをまとめて……ついでに、ポインティングベクトルを用いて……

$$\boldsymbol{f} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = \boldsymbol{f}_E + \boldsymbol{f}_B \tag{3.6}$$

とりあえずマイナスを移項しておいたけど、どうしたものか……
「力……」
そう。今計算していたのは力だ。いや、厳密には体積あたりの力だが……そもそも力とは、運動量の変化だったはず。ポインティングベクトルは……運動量でもあるのか！
じゃあ……こう式変形してやれば！

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_{em})=\boldsymbol{f}_E+\boldsymbol{f}_B \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{p}_{em}=\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{S}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} \tag{3.8}$$

これが運動量になる……のか？！　電磁場にはエネルギーも、エネルギーの流れも、そして……運動量もあった！　しかもそれはポインティングベクトル……エネルギー流れを光速の 2 乗で割ったものになる！
でも……電磁場が運動量を持つって、どういうことなの？

3.2　マクスウェルの応力テンソル

横目であかりが休憩を始めたのが見えた。私も休憩……というか、あかりに質問をしよう。
「ああ、確かに。電場が運動量を持つとしたら、クーロン力の反作用が説明できる。ローレンツ力も、運動量の保存則を守ると言えそう」
と、あかりは言った。
「あ、そうか！　電場と磁場の運動量とかエネルギーを無視したら保存則が成り立たないんだ！　それで、電磁場にはエネルギーも運動量もある！　ってことなんだね！」
さすがあかりだ。私が考え付かなかったことをすぐ答えてくれた。
「ただこの $\boldsymbol{f}_E+\boldsymbol{f}_B$ については考察が必要になりそう」
「だよね。どうすればいいのかなぁ」
私たちはノートを見つめる。ちらりとあかりの方を見やる。横の髪を手で抑えながらじっと目を凝らしていた。……さっきの言葉は、なんなのだろう。あかり……
「電場と磁場は同じ式の形しているから、電場だけ考えよう」

$$\boldsymbol{f}_E=\varepsilon_0((\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}) \tag{3.9}$$

「考えるべきは第 2 項の外積かな。……少し待ってて」
あかりは自分のノート……否、ルーズリーフを 1 枚取り出して、計算をする。
……その姿を、私は隣で見る。やはりあかりはすごい。私がやりたくないな、と感じた

計算に臆することなく立ち向かっていく。思えば数学というのはそういう、細かいところの積み重ねなのかもしれない。私には……そんなに注意深くなれない。

　あかりがいてくれたから……

「おそらく、この式が成り立つ」

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} - \nabla \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \tag{3.10}$$

「ん？　このさ、∇ と $\boldsymbol{E}$ 逆じゃない？」

「いいや、逆じゃない。これは成分で書いた方がわかりやすいかな」

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \dfrac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\boldsymbol{E}^2}{2} \\ E_x \dfrac{\partial E_y}{\partial x} + E_y \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + E_z \dfrac{\partial E_y}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\boldsymbol{E}^2}{2} \\ E_x \dfrac{\partial E_z}{\partial x} + E_y \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + E_z \dfrac{\partial E_z}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{\boldsymbol{E}^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

「あ、そうなるんだ……じゃあ逆じゃないね。でも難しそう……」

「いや、第１項も含めればそれほどでもない気がする。

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (E_x \boldsymbol{E}) - \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\boldsymbol{E}^2}{2} \\ \nabla \cdot (E_y \boldsymbol{E}) - \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\boldsymbol{E}^2}{2} \\ \nabla \cdot (E_z \boldsymbol{E}) - \dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{\boldsymbol{E}^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

「あー、そうなるのか。ならちょっとはわかりやすいけど……」

　だが、ここをわかりやすくして何になるというのか。私が知りたいのは、『これが何を表しているのか』だ。『これがどう書けるか』というのはあくまでも手段にすぎない……

「…………」

　あかりはこの式をじっと見つめていた。なんだろう。ここまで真剣に見つめるとは、なかなかあるものではない。静かに音も立てず見つめているだけなのに、全力で頭を回転させていると感じてしまう。

　……あかりはすごい。私も……ちょっと考えよう。

　実際の $\boldsymbol{f}_E$ にするにはこれに真空の誘電率 ε_0 をかける必要がある。ただこれは定数だから特に何もあるわけではなく……うーん、これ以上何かできるのか？

　例えば一定の電場があるとして……だめだ。微分で全部消える。

　他には……ええと。うーん……何も直感が働かない。

「あ……！！」

あかりは何かに気づいたようだ。チョークを乱暴に手に取り、かつかつ！　と少し乱れた字で書いていく。

$$
\int_V \boldsymbol{f}_E \, dV = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \int_V \nabla \cdot (E_x \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \boldsymbol{e}_x) \, dV \\ \int_V \nabla \cdot (E_y \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \boldsymbol{e}_y) \, dV \\ \int_V \nabla \cdot (E_z \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \boldsymbol{e}_z) \, dV \end{pmatrix} \tag{3.13}
$$

$$
= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \int_{\partial V} (E_x \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \boldsymbol{e}_x) \cdot d\boldsymbol{S} \\ \int_{\partial V} (E_y \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \boldsymbol{e}_y) \cdot d\boldsymbol{S} \\ \int_{\partial V} (E_z \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \boldsymbol{e}_z) \cdot d\boldsymbol{S} \end{pmatrix} \tag{3.14}
$$

$$
= \varepsilon_0 \int_{\partial V} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{n} dS \tag{3.15}
$$

「どう！？　あおい」

あかりは息を少し荒げながらそう言った。

「どう……って」

ここまでテンションの高いあかりを見たことがなく、驚く。しかしそれよりも、あかりの書いた式がとても複雑なことに驚いていた。ここまでの変形を暗算で行っていたのか！

なかなか真似できないことをする……！

「こ……この $\boldsymbol{n}$ ってのは？」

「∂V が領域 V の表面。向きは外向き。……積分の時に面上の点を全てたどるけれど、その時の面の法線ベクトル」

「法線ベクトルっていうと面に垂直なベクトルだよね。$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ ってこと？」

「うん、そういうこと。そうするとこの部分はガウスの法則が使用できて、結局行列で書くことができる。積分がベクトルの成分に入るから！」

「ちょ、ちょっと待って、行列って、私あんまりやったことないんだけど……！」

でも、そう表されている。そして成分はどうやら意味ありげな並びになっている。縦と横をひっくり返してもこの行列は同じだ。それに x, y, z に対応するように E_x, E_y, E_z がかけられている……ように見える。

「おそらくこれは幾何学的にはテンソルを表している。あまり私もやっていないけれ

ど……」
「テンソル？　えっと……何それ？」
「テンソルが何か……少し答えにくいけれど、この行列と思ってくれていい」

3.3　電磁場の応力が何に働くか

　電場で計算していたが、同様なことは磁場にも言えるだろう。面にかかる力は、面を指定する法線ベクトルをこの行列にかけて、それを面積分したものになる。というのがこの数式の解釈になるだろう。ただ、積分している間も面を指定する法線ベクトルは動き続けている。これは……。
「面にかかる力……？」
「そうだね。面に対して、力がかかっている」　面に垂直な力……だけではない。面に対して水平な力も計算している。面に対して、その面を引きずるような、摩擦力のような力も考えることができる。
「まあでも、面に力がかかるって……当たり前な気がするけど、よくわからないね」
「……確かに。力学でも、今までの電磁気でも……点にかかる力や、体積にかかる力ばかり考えてきた」
「確かに、そうだね。……面、面かぁ」
「……具体例で考えよう。$\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$ とすれば、この行列は対角化される」

$$\boldsymbol{f}_E = \varepsilon_0 \int_{\partial V} \begin{pmatrix} \dfrac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{E^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{E^2}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{n} dS \tag{3.16}$$

「んー……$\boldsymbol{n}$ って、面を指定する法線ベクトルな訳だよね……$\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ にすると」

$$\boldsymbol{f}_E = \varepsilon_0 \int_S \begin{pmatrix} \dfrac{E^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS = \begin{pmatrix} \dfrac{E^2 S}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} S\boldsymbol{n} \tag{3.17}$$

「x 軸方向の力が加わっているってことだね……あ！　面にかかる力って、圧力みたいなものなのかな？」
「そう見て良さそうだね。ただ、元々は閉曲面を考えてたから $\boldsymbol{n}$ の方向だけでなく $-\boldsymbol{n}$ の方向を持つ面も考えるべきだ」

「ああ、確かに。物体をぐるって囲む……少なくとも左の面と右の面を考えないといけないね」

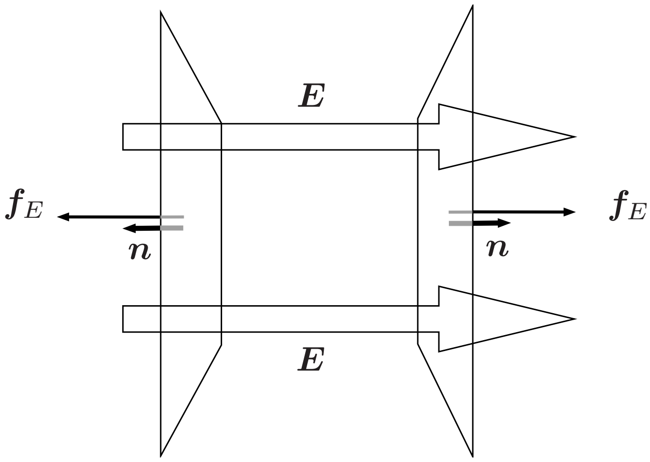

図１　電場に垂直な面にかかる力

　左側の面から受ける力と右側の面から受ける力を図示してみると、同じ大きさで逆向き。

「結局、両面から受ける力は合わせて 0 になるんだ」

「y 軸、z 軸にそれぞれ垂直……というか、x 軸に平行な面でも同じことだね。こういう x 軸を取り囲む管のようなものを考えてみればいい」

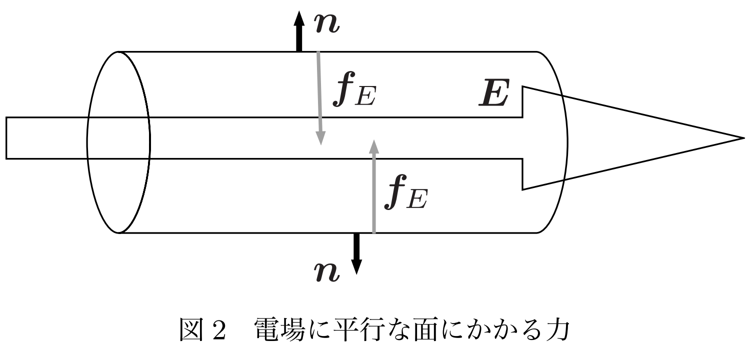

図２　電場に平行な面にかかる力

　$\boldsymbol{n}$ を管の側面に対して外向きにとると……$\boldsymbol{f}_E$ は $-\boldsymbol{n}$ 方向の力となる。つまり……面に対し、内向きに圧力がかかっている。ということか？

「さっきのも合わせて考えると、電気力線の管は線の方向に引っ張られいて……さらに側面から押されているということ……なのかな？」

　あかりは何も答えず、ただ考えている。うーん……力が釣り合った状態ではうまくイメージができない。釣り合わない、例えばプラスとマイナスの電荷にかかる力を考える

と……
「プラスとマイナスの電荷を結ぶ電気力線は、短くなろうとしてる……電気力線が縮んでる……？」
「……ねえあおい、そもそもこの力って、何にかかってるんだろう」
　あかりは私を見る。その目がキラキラしていることに、私は質問されてから気づいた。さっきの式変形の時も、あかりはとても楽しそうだった。
　そして、確かにそうだ。力が何に作用するのか。それが大事なわけだ。何にかかる力だろうか？　電気力線が受ける力？　いや、式を見ればわかる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_{em}\right)=\boldsymbol{f}_E+\boldsymbol{f}_B \tag{3.18}$$

　$\boldsymbol{p}$ は物体の運動量だ。物体にかかるローレンツ力をにより変化する運動量だ。しかし、それだけでなく、電磁場も力を受けて、運動量が変化する。電磁場の運動量は $\boldsymbol{p}_{em}=\boldsymbol{S}/c^2$。ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ を考えなければならない。ただ、ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ が変化するような場合のことを考えるのは難しそうだ……
「その……囲んでる空間内の、物体もしくは電磁場に……力がかかってるはず」
「物体の運動量か、電磁場の運動量に、か。うん、それでいいんだね」
「うーん……面にかかる力なんだよね。その面を境にして、物体か電磁場に力がかかる……そんな感じになるのかな」
「なるほどね。さすが――あおいだ」　褒められたけれど、私はまだ納得できなかった。あかりの理解力には、まだ追いつけない。

3.4　クーロン力とアンペール力

　下校時刻になったが、まだ空は明るかった。私とあかりはいつものように荷物をまとめて、昇降口に向かっていた。
「…………」
　私はまだ考えていた。電磁場が運動量を持つ。そしてその運動量は時間変化を起こし、その変化が、先ほどの面にかかる力によってわかる。
　理屈の上ではそうなるのだろう。数式からも納得はできた。しかし……どうも、具体的な感覚が私にはない。感覚にこだわりすぎているのかもしれないけれど……なんか、物足りない。
　電磁波の時のような、ポインティングベクトルの時のような高揚感が、今はない。
「どうしたの、あおい……さっきから静かだけど。独り言もなしに」
　革靴に履き替えた時に、あかりが声をかけてきた。

「いや……さっきからさっきの……応力？　をずっと考えてて」
　あかりの横に追いつく。あかりはさっき理解しているようだったが、どのくらいわかっているのだろうか……？
「……具体的な物理現象がわからない、ってこと？」
「うん……なんとも抽象的でさ、数式だけじゃ……やっぱり、実際の現象と絡めないと私はよく理解できないや」
「……あおいの、そういうところ、本当に尊敬しているよ」
「何それ……私はただ、何か……うん。『何か』を掴みたいだけだよ」
「……『何か』？」
　風が吹く。
「そう……数式と、感覚、それが結びつく『何か』が……」
　電磁波の式のように、ポインティングベクトルがエネルギー流れだったように。そういう直感的なものと――世界と、数式との繋がりが欲しい。
「って！　あは、なんか恥ずかしいこと言ったような気がする……あはは、あんまり気にしないでね！　変なこと言った……」
「……いや、変じゃないよ」
「私はただ、物理を楽しくやりたいなってだけ。すごいなって感じたいだけ……ただそれだけだよ。そのために式変形とか、解釈とか頑張りたいだけ」
「……。そうか。楽しくやりたいだけ、か」
　あかりはバッグの肩紐を整える。そして髪をかき上げ、頭をふる。
「うん、そうだね。私も、応力テンソルの形に変形した時、楽しかった」
　楽しかった……あかりが、感情を表明した！？　そのことが珍しく、私は驚く。あかりの柔らかい表情に、少し心が跳ねる。
「結局、定常的な電場や磁場では面に力はかかっていても釣り合うんだよね。じゃあ、定常的でないものを考えないといけないわけだ」
「う、うん！　そうだね、あかり。左辺の運動量が変化するような状況を考えたいんだけども……運動量が変化する……物体か、電磁場か……」
「物体の運動量が変化するのは、普通の力学での力として考えられそうだね」
「え、うん。あ……ああ！　そっかそうじゃん！！　電荷のある領域に絞ったら……」
　そうだ、プラスとマイナスが引き合う状況を考えればいいんだ！　これをクーロン力ではなく、この応力で解釈してみよう！　私は立ち止まり、手帳を取り出す。あかりも私の手帳を覗き込む。
「こっちの電荷に注目すると……左から多くの電気力線が入ってきて、右からはちょっと

しか出て行かない。左の面にかかる力と、右の面にかかる力。……面積が同じなら、電場が強い方に引っ張られる……！」

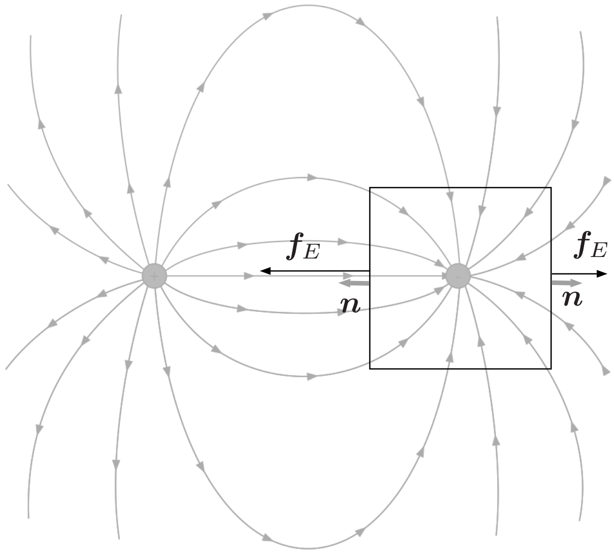

図 3　応力としてのクーロン力（引力）

あかりも「確かに」と同意する。私は嬉しくなり、他にもないか？　と頭の中を探す。
「電気力線が密集してる方に引き込まれる……だからプラスとマイナスが引き合う！　プラス電荷とマイナス電荷の間の電気力線が密集してるから！　あ！　そうか、同じ符号なら……」

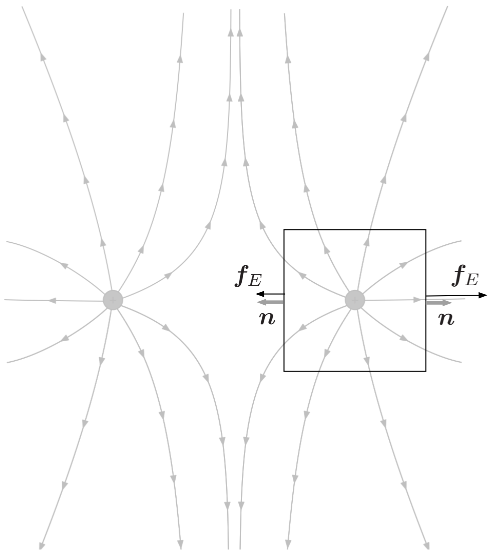

図 4　応力としてのクーロン力（斥力）

　うん！　考えていた通りだ。同符号の電荷ではその間の電気力線が少ない。間の電場は弱いのだ。ちょうど打ち消されてしまっている。だから、より電気力線の密集している方向に、電荷は力を受けるのだ！

「じゃあ……磁場はどうかな！？　磁場で引き合う……電流だ！」

　導線に流れる電流が同じ向きか、逆向きかというので力の向きは変わるんだった。その磁場の状況を図示すると……

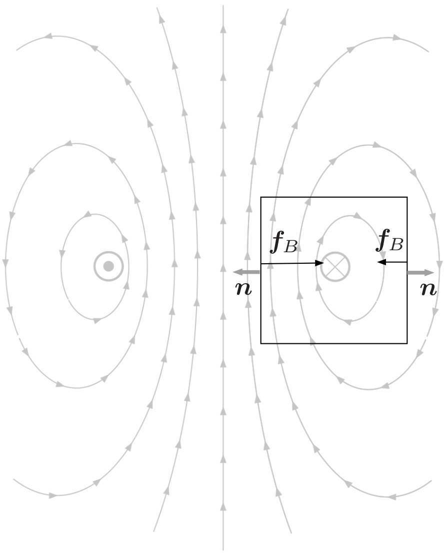

図 5　アンペール力（斥力）

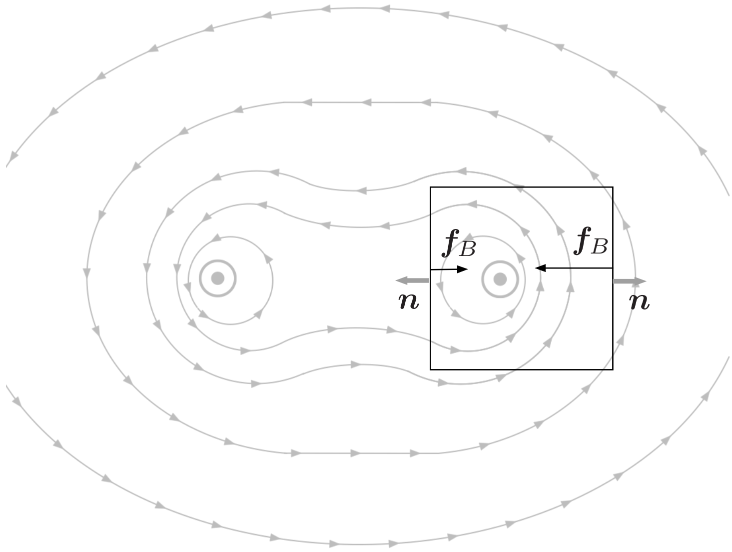

図 6　アンペール力（引力）

「今度は面の法線ベクトルと磁場の方向が垂直……に近いね。応力はは法線ベクトルと逆向きになるね。磁場が y 成分しかないと考えれば、こう書ける」

$$\boldsymbol{f}_B = \frac{1}{\mu_0}\int_{\partial V}\begin{pmatrix} -\dfrac{B^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{B^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{B^2}{2} \end{pmatrix}\boldsymbol{n}dS = -\frac{B^2}{2\mu_0}S\boldsymbol{n} \tag{3.19}$$

　あかりは自分の持っていたボールペンで、私の手帳に書き込む。確かに、合っている！

「磁場が強いほど大きくなる……うん！　引き合う時は面に垂直に磁場が刺さっている！

　そして離れ合う時には水平に磁場が反発している！」

　面に垂直ならば引っ張られて、平行なら押し込まれる。その力が内側にある電荷や電流にかかっているのだ！

「……はーっ！！　よし！」

「満足した？　あおい」

「うん！　満足……！　あ、いや、まだポインティングベクトルだけが変化する時を考えてないから……まだまだいけるよ！」

　空を見る。もうすぐ日が沈む。もう梅雨は明けているのだろう。そう、これからだ。私はまだまだ物理ができる。物理を、楽しむことができる。

「あかり、ありがとう！」

「いや……こちらの方こそ、ありがとう、あおい」

　そう言って 2 人同時に歩き出す。帰ろう、家に。また、明日からも頑張るために！