あなたと恋する物理学
電磁気学
Chapter 4 電磁場と力学

$yi = \mu$

2019 年 6 月 16 日

4　ポテンシャル

4.1　電場と磁場より基本的な量

　翌日、水曜日。その放課後。

　物理室に来て荷物を下ろしたところで、先に勉強していたあかりが質問してきた。

「そうだ、昨日のことだけど」

「えっ！？　え、何？」

　昨日、一昨日とどうも恥ずかしいことばかりしてきたせいで、少したじろいでしまう。

「……あおい。エネルギーといえば電位があったよね。あれはどこ行ったの？」

　あ、そっちか。物理の話か。……でもそうか。エネルギーといえば電位だ。電位と電荷をかければエネルギーになる。

「あー、確かに昨日は考えてなかったね。そうだ。今であればようやくわかるんだけど、こういう関係が成り立っているんだよね」

$$V = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{4.2}$$

　この前まで全くわからなかった式が今ならわかる。知識をつけている実感がある！
「そうだね。……ただ、一意的に電位が定まるのはこれが成り立つときだけ」

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{4.3}$$

「え、なんで？」
「……ある基準点 $\boldsymbol{r}_0$ から電位を考えるってのは合っているんだけど、これは線積分だから積分路が必要なわけ。そして、積分路に寄らずに値が決まるためには……閉じたループで必ず 0 になる必要がある」
「あ、なるほど。自分のところに戻ってきたら 0 にならないといけないもんね。だから条件はこう、かな」

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.4}$$

「ストークスの定理を用いると、つまりこう」

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.5}$$

「任意の閉曲線 C の議論が、任意の面 S での議論になる。連続性、いや滑らかさを課すことで $\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ が必要条件になる」
「んーでもさ、Maxwell 方程式ってこうだよね」

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.6}$$

「うん。磁場が一定の時はちゃんと電位を定めることができる」
「ってことはやっぱり、磁場がないときにしか電位って決まらないのかな」
「……いや、ちょっと待って、磁場にはできるかもしれない」
「え？　磁場？」
　電位はできないけど、磁場には……磁位ができる、みたいな？
「$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ なら、$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ となる $\boldsymbol{A}$ が存在することがわかっている」
「え、そうなの？　……まあ確かに回転の発散は 0 だったね」

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{4.7}$$

「……あれ？ $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ ってことは、これ代入してさ」

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{4.8}$$

「これ、電位っぽいのができるんじゃない！？」

4.2　ポテンシャルの存在定理

　あかりはその式変形を想定していなかったようで、しばらくその式を見て言った。

「……確かに」

「でも、本当にそんなベクトル $\boldsymbol{A}$ があるの？」

「ある。……ちょっと待って」

　あかりはカバンから本を取り出し、少しめくる。それを覚えたのか、本を閉じて黒板に書く。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \int_0^1 (zB_y(t\boldsymbol{r}) - yB_z(t\boldsymbol{r}))tdt \\ \int_0^1 (xB_z(t\boldsymbol{r}) - zB_x(t\boldsymbol{r}))tdt \\ \int_0^1 (yB_x(t\boldsymbol{r}) - xB_y(t\boldsymbol{r}))tdt \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

「これが具体的な表式になる」

「んー……？　t がよくわかんないけど、本当に成り立つの？」

「そうだね。z 成分だけ見ればいいかな。」

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{4.10}$$

「うん。じゃあこれで……」

「ただ、もう少し考えることはある。この式変形をする」

$$\frac{\partial}{\partial x}(B_z(t\boldsymbol{r})) = t\frac{\partial B_z}{\partial x}(t\boldsymbol{r}) \tag{4.11}$$

「えっ？　えっ？　どういうこと？」

「……こういうこと」

$$\frac{\partial}{\partial x}f(tx) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t(x+h)) - f(tx)}{h} = t\lim_{h\to 0}\frac{f(tx+th) - f(tx)}{th} = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx) \tag{4.12}$$

「あ、んー、ええと、$f(tx)$ っていう関数と $f(x)$ という関数を別に考えてるってこと、なのかな？　文字が違うから……あ！　$F_t(x) = f(tx)$ みたいな？　合成関数の微分みたいな？」

「そう。これで外積の計算をする。z 成分だけ計算すればいいよね」

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=\int_0^1\left(2B_z(t\boldsymbol{r})+x\frac{\partial}{\partial x}B_z(t\boldsymbol{r})-z\frac{\partial}{\partial x}B_x(t\boldsymbol{r})+y\frac{\partial}{\partial y}B_z(t\boldsymbol{r})-z\frac{\partial}{\partial y}B_y(t\boldsymbol{r})\right)t\,dt \tag{4.13}$$

$$=\int_0^1\left(2B_z(t\boldsymbol{r})+tx\frac{\partial B_z}{\partial x}(t\boldsymbol{r})-tz\frac{\partial B_x}{\partial x}(t\boldsymbol{r})+ty\frac{\partial B_z}{\partial y}(t\boldsymbol{r})-tz\frac{\partial B_y}{\partial y}(t\boldsymbol{r})\right)t\,dt \tag{4.14}$$

$$=\int_0^1\left(2B_z(t\boldsymbol{r})+t\boldsymbol{r}\cdot(\nabla B_z(t\boldsymbol{r}))-tz\nabla\cdot\boldsymbol{B}(t\boldsymbol{r})\right)t\,dt \tag{4.15}$$

「そっか！　これで使えるんだ！」

「それと、もう一つ」

$$\frac{d}{dt}f(t\boldsymbol{r})=\left(\frac{d(tx)}{dt}\frac{\partial}{\partial(tx)}+\frac{d(ty)}{dt}\frac{\partial}{\partial(ty)}+\frac{d(tz)}{dt}\frac{\partial}{\partial(tz)}\right)f(t\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(t\boldsymbol{r}) \tag{4.16}$$

「これを使うと、」

$$\frac{d}{dt}\left(t^2f(t\boldsymbol{r})\right)=2tf(t\boldsymbol{r})+t^2\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(t\boldsymbol{r}) \tag{4.17}$$

「ゆえに、」

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=\int_0^1\left(\frac{d}{dt}(t^2B_z(t\boldsymbol{r}))-t^2z\nabla\cdot\boldsymbol{B}(t\boldsymbol{r})\right)dt \tag{4.18}$$

「へぇ！　そうなるんだ！　じゃあ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ で、$t=1$ のやつだけ残るから……！」

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=B_z(\boldsymbol{r}) \tag{4.19}$$

「そう。これを他の成分でも同様に行えば良い。ゆえに、ポテンシャルの存在が示せた」

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \tag{4.20}$$

「気をつけなければいけないのは、どの関数が何を表しているのかってことかな」

4.3　スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

「じゃあ、やっぱりさ！　これ成り立ってるよね！」

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{4.21}$$

「そうだね。……そうなると、ポテンシャルができるね」

「えっと、本を見るとこれ ϕ で書かれるみたい！」

$$-\nabla\phi=\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{4.22}$$

「……そうなると、電場や磁場はこのポテンシャルで書かれるということか」

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{4.23}$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{4.24}$$

「そういうことだね！　……そうだ！　Maxwell 方程式をこのポテンシャルで表したらどうなるだろう！？」
「いい考えだ。でも $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ と $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ は自動的に成り立っているから、電荷密度と電流密度の式だけが残るね」

$$-\triangle\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.25}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \mu_0 \boldsymbol{i} \tag{4.26}$$

「……汚いね」
「そうだね」
　やっぱりポテンシャルで書くべきではないのか？　余計なことを考えたからこんな面倒臭い式になったのか……うぅん、どうすればいいのだろう。
「第 2 項はまだもう少し展開できるけれど……」

$$-\triangle \boldsymbol{A} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \boldsymbol{i} \tag{4.27}$$

「でも……これ以上式変形、できないよね？」
「……思いつかない。ごめん、あおい」
「いいや！　大丈夫大丈夫！」

4.4　ゲージ変換

　帰りの電車で偶然会った春さんは言った。
「うん、知ってたよ」
　揺れる車内で、窓の外の夕日が足元を照らす。これだって電磁波が橙色の波長を持って反射しているのだ。あの時から私は、世界を見る目が変わっている。
　春さんも、そうなのだろうか。いや、私よりも物理をよく知っているはずだ。春さんには、どう、世界が見えているのだろうか……？
「というか、おとといあたりだったかな……教えてもらったお礼がしたいから、って」
「お礼……あっ、春さん、本当にお礼なくていいんですか？　日曜日の……」

「あはは、いいよいいよ。私が好きでやったことだし。だからお礼はいらないよ。……ってあかりちゃんにも言ったら、逆にプレゼントを要求されちゃった」

　なんてことを、先輩に……でもまあ、あかりらしいといえばあかりらしい。

「あぁ、あかり……即物的なところありますからね。でも、話ができれば……って言ってました。もっと物理の話をしたいんだって」

「そっか……そうだね。物理をやるにも、仲間が欲しくなるからね。1 人でなんでもできるわけじゃない。できないことの方が多いからさ」

　少し目を伏せた春さんに、私は今月のことを思い出す。

　電磁気学に費やした、この 6 月を。

「そうですよね。……あかりがいてくれて、本当に良かったです。あ！　もちろん春さんも！」

　春さんは笑った。私は少し恥ずかしくなって下を向く。カバンが目に入り、今日やっていたことを思い出す。

「あっ、そういえばポテンシャルってのを考えたんですけど、Maxwell 方程式を書き換えたら、すごく汚い式になって……」

　導出した式を書いたノートを見せる。それを春さんは少しの間、見つめていた。

「うん、こうなるんだっけ……そうだね。そのまま代入したらとても汚い式になる」

「ですよね！　……ってことはポテンシャルって、ただ便宜上考えただけのものなんですかね」

「いや、そうでもない」

　と春さんは言った。

「実は、電磁場のポテンシャル $\phi, \boldsymbol{A}$ にはゲージ変換というものがあるんだ。関数 u を使って、こう変換する」

$$\phi \to \phi - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.28}$$

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla u \tag{4.29}$$

「この変換をゲージ変換という」

「え……？　どういうことですか？」

　意味が、不明だ。関数 u？　この……置き換え？　変換？　どういうことだ？

「これで電場と磁場を計算してみて」

「電場は……」

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ &\to -\nabla\left(\phi - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{A} + \nabla u\right) = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{4.30}$$

「あ！　ちょうど打ち消しあうんですね！　えっ！　もしかして磁場も！？」

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\ &\to \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla u) = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{4.31}$$

「すごい！　変換した後のものを使っても、電場と磁場は変わらない！！」
「そう。『ゲージ変換で電場と磁場は変わらない』んだよ。もともと、電位って差にしか意味がないんだよ。定数だけ変化させても、電場は変わらない。本質的には何も変わらない。……そんな感じで、定数だけの変換を拡張したもの、それがゲージ変換」
　って、私はとらえてるよ。と春さんは言った。
　ゲージ……ゲージという言葉の意味はなんだっけ。ゲージがたまる、とかゲームでは使うんだっけ。ゲージの変換……電位には差しか意味がないんだっけ。となると、『今のゲージの初期点には意味がない』というようなことか。
　……本当にこれでいいのかなぁ。
「うーん……イマイチ、掴めないんですけど」
「そうだね。……でも、このような変換ができるということが、逆に電磁場とは何かということを考えるヒントになる。……あおいちゃん、確かに Maxwell 方程式が基本的な式だってことは話した。けれど、『どうしてそれが基本的なのか？』『本当にそれは基本的なのか？』ということはまた別に考えないといけない」
「あっ……」
　そうだった。Maxwell 方程式から何か見えないか、ということは考えていたけれど……そっちの道もあるわけだ。なぜ Maxwell 方程式が成り立つのか？　もっと基本的なものはないのか？
　それが……ポテンシャル？
「特殊相対論やったらかなり整理できるんだけどね。……電磁場とは、一体なんなのか？」
「電磁場って……」
　なんだろう……？　全くわからない。
「うん。それがわかったら、きっとすごく楽しいだろうね」
　そう思わない？　と問うてきた春さんの顔は、とても嬉しそうだった。

4.5 ローレンツ・ゲージ

春さんは『このゲージ関数 u を適切に選ぶことで、方程式は簡単になる』と言った。帰ってきて、夕食をすませて……私は、ネットで調べていた。ゲージ変換のことを。

「……ローレンツ・ゲージ？」

という言葉を見つけた。それは数式でこう書かれるとのことだった。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{4.32}$$

「んー……」

これは、ポテンシャルの $\boldsymbol{A}$ と ϕ が満たす式……なのか。自然に満たす式……ではないよね。ある条件が必要だ。その条件が本当に成り立つのか？

「ある条件……あ、ゲージの条件だったらなんとか……」

ゲージ関数 u で変換した後で、この式が成り立つなら。そうなれば……

「この式が成り立つようにできる……？」

ひとまず、u の式は、変換前の $\tilde{\phi}, \tilde{\boldsymbol{A}}$ を使って……ええと。変換した後でこの式が成り立てばいいのだから、

$$\left(\triangle - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = -\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{A}} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \tag{4.33}$$

「こう、かな……」

電磁ポテンシャルをとりあえず決めて……それで、この方程式が成り立つような u を見つけて……それで、ゲージ変換すればいいのか。

「これ解けるのかな……」

明日、あかりに聞いてみよう。

さて……問題は、これが成り立って、それで何があるのか、だ。成り立ったからなんだというのか。それが大事……Maxwell 方程式を書き換えたものを見よう。

$$-\triangle \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.34}$$

$$-\triangle \boldsymbol{A} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \boldsymbol{i} \tag{4.35}$$

「ん、$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ で整理すると……」

第 1 式は ϕ だけの式にできる。ん？　さっきと同じ、$\triangle - \partial^2/\partial t^2$ というものがある。それで、第 2 式は……置き換えて……あ！　消える！　途中が消える！

「あっ、ああっ！」

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle\right)\phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.36}$$

$$\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle\right)\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{i} \tag{4.37}$$

「綺麗……あ」

今週の初めに考えた式、そのものではないか……？　いや、厳密には少し違うけれども、右辺に何かついているけれど……$\rho=0,\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$ だったら、波動方程式に一致するのではないか……？

$$\triangle\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{4.38}$$

$$\triangle\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0 \tag{4.39}$$

「つまり、波動方程式はなるべくして成り立った式……ってこと、だよね」

ポテンシャルの時点で、波動方程式……もどきは成り立っていたわけだ。電場や磁場はそれを微分したものだから、当然成立する。

「ん、ポテンシャルも伝わっていく……？」

光の速さで電場や磁場が伝わっていく、というのが波動方程式だった。では、ポテンシャルも光の速さで伝わっていく、ということだろうか……！？

「……特殊相対論？」

やっぱり、そこになるわけだ。

4.6　クーロン・ゲージ

翌日、木曜日。ホームルームが終わった後、私は急いで物理室に向かった。あかりの教室の担任は話が短すぎることで有名なのだ。

「ねぇあかり！　これ解ける？」

物理室に着くなり、私はあかりに昨日の式を見せた。ローレンツゲージを満たすためにゲージ関数が満たすべき式だ。あかりはしばらくその式を見て、

「ポテンシャル関数 $\phi,\boldsymbol{A}$ に対して、この u を解くって話か……うん、解ける」

数学的には色々条件があるけど、とあかりは付け加えた。

「えっ！？　解けるの！？」

この複雑な式が、本当に解けるのだろうか。右辺がどうなっているのかすら、わからないのに……

「確かに右辺は難しい形になっている。けれども、場の関数だということはわかる。これに特異点がないとして考えるけれど……そうしたら、グリーン関数法という、微分方程式を解くやり方が使える」
「グリーン……？」
「グリーン関数の導出にはフーリエ変換とか、留数定理が必要だけれど……うん、あおいには実際に式があったほうがいいかな」
　そう言って、あかりは式を書いた。

$$-\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{4.40}$$

「例えば、こんな式を解くことを考える」
「ん？　うん。まあ数学だから ε_0 とか抜かしてるんだね」
「そうすると、グリーン関数を使って……」

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}' \, \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r}') \tag{4.41}$$

「というのが成り立つ」
「えっ、ええっ！？　これポテンシャルじゃん！？　どうやって！？」
「どうやって、というとフーリエ変換と留数定理。でも物理としてみれば……点電荷の重ね合わせ、違う？」
「えっ、いや、ちょっと待って……私がやろうとしてたのはさ！　『なんで逆 2 乗なのか』ってこと！　それが知りたくて電磁気勉強しようと思って……で、ええ！？」
　点電荷の作る電場はなぜ逆 2 乗なのか。それはポテンシャルがなぜ $1/r$ なのかということだった。しかし、この式は……まるで『この微分方程式が成り立っているから、逆 2 乗だよ』と言っているようなものではないか！
「ああ……そうだね。そう言うならこの Poisson 方程式が一つの答えになるわけだ。……そういえば、Maxwell 方程式の書き換えで $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ の時にならこれが成り立つね」
　確か……と言いながらあかりは式を書き換える。

$$-\triangle\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.42}$$

$$-\triangle\boldsymbol{A} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu_0\boldsymbol{i} \tag{4.43}$$

「確かに第 1 式はさっきの方程式に一致する……2 式目は綺麗にならないね」
「で……でもさ、この方程式が成り立つようなゲージがあるってことだよね。この……クーロンの法則？」

どのようにすればいいだろう。$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ ということだった。$\boldsymbol{A}$ のゲージ変換を思い出すと……

$$\triangle u = -\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{A}} \tag{4.44}$$

ということか……！？　これもさっきの、グリーン関数法によって解くことができる！

一体なんだ、その摩訶不思議な方法は……！！

4.7　Laplace 方程式と Poisson 方程式

あかりはなんでもなかったように数式を見つめる。

「それはそうと、この方程式か」

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.45}$$

「……時間微分が入ってるとなると、少し拡張が必要か……ええと」

と、あかりは計算を始めた。私はそのペン先を追う。

「…………」

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\, d\omega$$

何を計算しているのだろう。よくわからない……

「ごめん、もう少しかかりそう。ちょっと待ってて」

「うん、わかった……」

「そこまで難しいのか。あかりでも……ふーれぃ変換？　流水定理？　うーん、どんなものなのだろうか……

あかりは計算をしている。私も少し計算しよう……あかりの計算によると、確か、この方程式から……

$$-\triangle\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.46}$$

この式が成り立つんだっけ。

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}'\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r}') \tag{4.47}$$

これを微分するんだ。微分するのは $\boldsymbol{r}$ の方だ。ダッシュがついている方はしなくていい。計算するのは……

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

これを x で微分するだけにして……ん？　どこかでやった計算だな。
「あ……これ結果 0 になるじゃん」

だったら、右辺は 0 になってしまう。けれどもあかりはこの式は正しいと言っている。どういうことか？
「……$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ では、0 にならない、とか……？」

式を見る限り、そうしてしまっては分母が無限大に発散してしまっている……けれど、ごくごく小さい体積に、そう、点のように関数があるとすれば……何か、定数 C が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ にあるとすれば……

$$\triangle\phi = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \tag{4.48}$$

……とか？

なんか、すごく間違った式変形をしている気がする……こんなので良いのだろうか。この C についてもよくわからないし……元の式の解だというのなら $C = -4\pi$ になるのだろうけど、よくわからない。

4.8　遅延・先進ポテンシャル

私がウンウン唸っていると、
「できた」

と言ってあかりは私のところにルーズリーフを持ってきた。この式が書かれていた。

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}', t')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{4.49}$$

ここで、

$$t' = t \pm \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c} \tag{4.50}$$

である。

と、書いてあった。
「ん……さっきのと似てる。けど、この t' は $\boldsymbol{r}'$ によって変わるんだ……左辺の時刻 t と少しずれている」
「うん。……物理としてはきっと、ここでマイナス符号を取るのが正解だと思う」

あかりは t' のプラマイを指差した。

ここでマイナスをとったら……t' というのは、時刻 t から時間 $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c$ を引いた、過去の時刻……つまり、$\boldsymbol{r}'$ の位置から光が飛んできて、それを $\boldsymbol{r}$ で受け取るまでの時間だけ遡っている。そうか、点が離れていてもその情報は光の早さを超えることはないんだ。ある程度、光が伝播するまでのタイムラグがある。

「過去の電荷が、今の位置に関係してくる……」
「うん、そう思うんだけど……どう？」
　確かに、なんか物理的には正しい気はする。あかりが計算したなら、きっとこの結果も正しいんだろう。
　……でも、なんか拭えない。
　私がグリーン関数なるものを理解していない、あかりが計算した内容がわかっていないというのもあるだろうけど……
「……この、プラス符号の方には意味ってないのかな」
　私はイメージする。
　電荷によって電位は作られる……そして、電荷は電位により力を受ける。
「未来から過去に情報が送られる……なんてことはないと思うけど」
「あ、そこはあかりの言う通りなんだけど……これって、ρ の分布がわかってるんだよね？
　……もし、時刻 t より前の電荷分布がわかってるならここの符号はマイナスにとるべきなんだろうけど……」
　逆に、と考えて見る。
「……今から電荷分布がわかるとしたら、それで過去を推理できる……んじゃないかな」
「過去を推理……決定論！？」
「あ、そうなのかな？　でもそうだよね。物理って今がわかれば未来がわかる。そして、過去もわかる。んだよね」
　運動方程式はこの形をしていた。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{4.51}$$

　これは初期値として、位置と速度を与えればその後の運動もわかる。そして、その前の運動……過去の運動だってわかる。
「電磁気は一瞬で伝わらないから、タイムラグあるけど……それでも、未来の電荷分布がわかるなら、いまの電位だってわかったりしないのかな？」
「…………」
　あかりは呆然としている。どうしたのだろう。
「あおい」
「えっ、何」
「……将来あおいがノーベル賞もらったときのために、今からサイン貰ってもいい？」
「えっ、えーっ！？　いや……えーっ！？　無理無理無理！！」
　あかりの衝撃的な発言に、どう答えればいいのか。私は顔を赤くしながら、あかりのべ

た褒めを否定していた。
　でも私はとても嬉しかった。あかりに認められたようで。あかりにはまだまだ追いつけないかもしれない。けれど、いつか追いつくかもしれない。
　そんな希望が私の心に芽生えた。

5　幕間

「そうだ、約束覚えてるよね」
　翌日、週の終わりの金曜日。あかりは確認してきた。
「うん、もちろん！　プレゼントもちゃんと考えているから安心して！」
　約束……ベクトル解析について教えてもらう代わりに、誕生日を祝ってほしい、とのことだった。そして今週の日曜日はあかりの誕生日なのだ！
「なら良かった。……日曜日の昼頃に駅前に集合で、いい？」
「うん了解！　……でもさ、今更だけどどうして？」
「……っていうのは？」
「いやあ、まあ、あかりってそういうのじゃないと思ってたから。誕生日を祝うようなキャラには見えないっていうか……いや！？　別にそういうのじゃなくて！！　……そんな気にするのかなぁ、って」
　私はしどろもどろになりながらあかりに問う。
「……確かに、そういえばそうだ」
　と、あかりは答えた。
「そういえばって……じゃあなんで？」
「……なんでかって言えば、やっぱりタダで教えるのは嫌だったから？　かな」
　疑問形？
「ああまあ、それはそうなんだけど……」
　確かに、タダで教わるのは気が引ける。プレゼントという対価で気が軽くなったのも事実だ。
　だからって、誕生日……そんな短絡的な。
「やっぱり短絡的だったかな」
「いいや！　そんなことないよ！　誕生日を祝ってもらいたいってのはわかるし！」
「……本当のことを言うと、特に誕生日である必要はないかな。ただ、それで十分だから。十分条件」
　必要条件、十分条件。
　ええと……『私に数学を教える』ことへの必要条件ではないが十分条件である……？

ええとつまり命題はどんな感じに……？
「別にいいよ。誕生日プレゼントさえもらえれば」
「なんとも即物的な言い方だねあかり……」
「駅前に 14 時。いいかな」
「ん、わかった。……ああそうだ。春さん呼んでもいい？」
「いいよ。というかもう誘った」
「え？！　そうなの！？」
「……誕生日パーティというか、普通に話したいだけだから」
　そうなのか。ただ話したいだけ……
　なんか、あかりらしいなぁ。
「物理の話ができるの、あおいと春さんくらいしかいないから……誕生日祝われるのも、そういう人がいい。それに……」
「……それに？」
　あかりはしばらく毛先をいじる。顔が少し赤くなって……照れている？
「あおいと勉強すると、とても……楽しい、って感じるから」
「あかり……！」
　瞳に涙が溜まり、熱いものがこみ上げてくる。
「……それまでに課題終わらせといてね。私は終わったけど。あと見せないよ」
「……あかりぃぃぃ！！」
　現実を思い出させないでぇ！