あなたと恋する物理学
特殊相対論
Chapter 4 多様体入門

$yi = \mu$

2019 年 12 月 1 日

4.6　内積空間と Riemann 多様体

日曜日。また私はあかりの家に行った。玄関であかりに会い、「じゃーん」と言う。

「ちょ……なんで浴衣？」

私の姿を見て、驚いた顔をするあかり。

「今日はお祭りがあるんだよっ！　お祭りと言ったら浴衣でしょ！！」

「……別に浴衣じゃなくても、普段着でいいじゃん」

そう言いながらあかりの家に通される。お邪魔しますと言い、あかりの部屋に向かう。

「あー違うよぅあかりぃ。こういうのは雰囲気が大事なの！　ビジュアルが大事なの！」

「ビジュアルねぇ……小さい頃は浴衣着たことはあるけれど、最近はお祭り自体行かないし。誘われることもないからね」

去年……はまだあかりと知り合っていない。知り合っていれば確実に誘ったのに。

「じゃあ、今年は行こう！　あかりの話が終わったらさ！」

私はお願いをする。こういう時にも頭には絶えず “受験生” という言葉がある。しかし、それ以前に我々は “女子高生”――それ以上に価値のあることなんて世の中にあるのかッ！？

「はぁ……わかった。じゃあ手早く終わらせて、行こうか。高校最後のお祭り」

「おうっ！」

「お茶取ってくる」

「あかりのお母さんに浴衣ないか聞いてくる！」

「えっ！？　ちょっ、あおいぃ！」

「……着たよ。ほら」

　あかりは渋々、浴衣を着てくれた。なんでもあかりのお母さんが昔着ていたものらしい。いまでも着れるとはさすがだし。

「やっぱり可愛いっ！！！」

　ケータイを取り出し、カメラで激写する。あかりは赤面し、私のカメラを奪いにくる。

「ちょ、やめ、やめて。やめ……やめろ渡辺ッ！」

「ガチギレー！？」

　ケータイは取り上げられた。写真を消されることはなかったのだけれど。

「今日はこれで数学、教えて？」

「……いいけれど。」

4.6.1 内積と音楽同型

あかりは今日も始めに、定義を書いた。

実ベクトル空間 V 上の 2 次形式 $g \in T^0_2(V)$ が以下を満たすとき、g を V 上の**内積**と呼ぶ。

1. $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0$ かつ $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
2. $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
3. $\forall \boldsymbol{v} \in V, g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

実ベクトル空間にある内積形式を 1 つ定めたものを**内積空間**と呼ぶこともある。

「第 1 条件は正値性だね。あるベクトルの長さが正であることを保証する。大きさが 0 ならばそのベクトルは 0 ベクトルだということも保証しよう。第 2 条件は対称性。これは特に言うことはないね。第 3 条件は非退化性。これはあおいは聞いたことないんじゃないかな」
「ひたいか……聞いたことないや。なんか、当たり前な気がするけれど……どの方向にも長さが 0 なら、そのベクトルも長さ 0……みたいな？」
「……あぁ、そういうことか。大体はそんな感じ。行列表示して考えて見よう。

$$g_{\mu\nu} = g(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu) \tag{4.6.1}$$

このように成分表示すると、

$$\forall v^\mu,\ g_{\mu\nu} v^\mu u^\nu = 0 \Longrightarrow u^\nu = 0 \tag{4.6.2}$$

ということだ。つまり、

$$g_{\mu\nu} u^\nu = 0 \Longrightarrow u^\nu = 0 \tag{4.6.3}$$

あおい、何か気づかない？」
「気づく……うーん。行列とベクトルって感じがする。行列 g にベクトル u がかかって、それが 0 なら u も 0 になる……みたいな？」
「そうだね。線形代数の言葉を使うなら、$g_{\mu\nu}$ を (μ, ν) 成分とする行列 g が、逆行列 g^{-1} を持つということ。それが非退化性だ。そして、内積が非退化のとき、以下の定理が成り立つ」

$$\forall \alpha \in V^*,\ \exists(\sharp\alpha) \in V \text{ s.t. } \forall \boldsymbol{u} \in V,\ \alpha(\boldsymbol{u}) = g(\sharp\alpha, \boldsymbol{u}) \tag{4.6.4}$$

$$\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \exists(\flat\boldsymbol{v}) \in V^* \text{ s.t. } \forall \boldsymbol{u} \in V,\ \flat\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \tag{4.6.5}$$

現れた意外な記号に、私は驚いた。
「えっ、シャープとフラット！？　音楽っ！？」
「そう。対応 $\sharp : V^* \to V$ と逆対応 $\flat : V \to V^*$ が存在する。この 2 つの対応……同型写像を、**音楽同型**という」
「音楽……半音上げる、半音下げる……」
「なぜ $\sharp$ と $\flat$ なのか。それは添字の構造を見てもらえればわかる。成分表示しよう。双対基底を σ^μ で書くと、

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_\mu \sigma^\mu &\longmapsto \sharp\alpha = g^{\mu\nu}\alpha_\nu \boldsymbol{e}_\mu \\ \boldsymbol{v} = v^\mu \boldsymbol{e}_\mu &\longmapsto \flat\boldsymbol{v} = g_{\mu\nu} v^\nu \sigma^\mu \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

となる。線形写像になっていることもわかるね」
「$\sharp$ で添字が上がって……$\flat$ で添字が下がってる！　そっか！　g での添字の上げ下げに対応しているのか！」
「うん。物理……特に特殊相対論ではこの辺りを考えなかったね。けれど、数学的にちゃんとやろうとしたらこうなる。内積の非退化性が問題だったわけだ」
　相対論では、成分の添え字が上付きなら反変、そして下付きなら共変という扱いをしていた。これをあかりに教えてもらった言葉で言うなら、反変ベクトルが普通のベクトルで、共変ベクトルは双対ベクトルなんだ！　そして、添え字の上げ下げそのものが音楽同型！
「さて、ここで V^* に内積を定めることができるようになった。自然にね」

V^* 上の内積 $\widetilde{g} \in T^2_0(V)$ を

$$\widetilde{g}(\alpha, \beta) = g(\sharp\alpha, \sharp\beta) \tag{4.6.7}$$

と定める。

「このように。添字で見れば、単に $g^{\mu\nu}\alpha_\mu\beta_\nu$ としているだけなんだけれど」
「ん……ちょっと待って」
　私はノートに書いて確かめる。ええと、確か

$$\sharp\alpha = g^{\mu\nu}\alpha_\nu \boldsymbol{e}_\mu,\ \sharp\beta = g^{\rho\sigma}\beta_\sigma \boldsymbol{e}_\rho \tag{4.6.8}$$

だから、

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\alpha, \beta) &= g_{\mu\rho} g^{\mu\nu}\alpha_\nu g^{\rho\sigma}\beta_\sigma \\ &= \delta^\nu_\rho g^{\rho\sigma}\alpha_\nu\beta_\sigma \\ &= g^{\nu\sigma}\alpha_\nu\beta_\sigma \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

「うん！　確かに！　計量の逆行列で内積をとってるね！」
「そうだね。さて、じゃあ次に、内積があるベクトル空間で、使いやすい基底を選ぶことにしよう。ベクトルの問題を解く時は、基底を選ぶことが大事だからね」

n 次元実ベクトル空間 V およびその上で定義された内積 g に対して、V の基底 $\{\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n\}$ を、ベクトル空間 V の**正規直交基底**という。

$$g(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{4.6.10}$$

「正規、というのは各ベクトルの長さが 1 であること。直交、というのは異なるベクトル同士の内積が 0 であることを指す」

「ん。確かに。その基底で展開すれば、内積って、成分の和になるもんね！」

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu \boldsymbol{X}_\mu,\ \boldsymbol{u} &= \sum_{\mu=1}^{n} u^\mu \boldsymbol{X}_\mu \\ g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} v^\mu u^\nu g(\boldsymbol{X}_\mu, \boldsymbol{X}_\nu) \qquad (4.6.11) \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \delta_{\mu\nu} v^\mu u^\nu = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu u^\mu \end{aligned}$$

「そういうこと。次に、この正規直交基底に対する双対基底を考える。双対基底というのは、基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対して、$\sigma^\mu(\boldsymbol{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$ となるものだった。正規直交基底に対する双対基底を、$\{\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(n)}\}$ とすると、これが成立するよね」

$$\alpha^{(\mu)}(\boldsymbol{X}_\nu) = \delta^\mu_\nu \tag{4.6.12}$$

「それが双対基底の定義だったもんね」

「確かにそう。ここで、正規直交基底における内積は $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ と書くことができる。単位行列だ。つまり、逆行列も単位行列になる。すなわち

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \tag{4.6.13}$$

ということがわかる。これによって、$\{\alpha^{(\mu)}\}$ が、V^* の正規直交基底であることが、確かめられる。なぜなら、以下の関係があるから。

$$\flat \boldsymbol{X}_\mu = \alpha^{(\mu)},\ \sharp \alpha^{(\mu)} = \boldsymbol{X}_\mu \tag{4.6.14}$$

これゆえに、

$$\widetilde{g}(\alpha^{(\mu)}, \alpha^{(\nu)}) = g(\boldsymbol{X}_\mu, \boldsymbol{X}_\nu) = \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \tag{4.6.15}$$

ってこと」

4.6.2　交代形式の内積

「次に、内積を交代形式に拡張していく。まずは、交代形式を正規直交基底で展開しよう。$\omega \in \Omega^k(V)$ に対して

$$\omega = \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_k} \omega_{\mu_1, \cdots, \mu_k} \alpha^{(\mu_1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(\mu_k)} \tag{4.6.16}$$

こう、展開する。ここで、内積をこのように定義する。

$\omega, \eta \in \Omega^k(V)$ に対して、その内積 $\langle \omega, \eta \rangle$ を

$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_k} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_k} \eta_{\mu_1 \ldots \mu_k} \tag{4.6.17}$$

と定める。ここで、ω, η は V^* の正規直交基底 $\{\alpha^{(\mu)}\}$ にて

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_k} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} \alpha^{(\mu_1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(\mu_k)} \\ \eta &= \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_k} \eta_{\mu_1 \cdots \mu_k} \alpha^{(\mu_1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(\mu_k)} \end{aligned} \tag{4.6.18}$$

と展開されているとする。

「……なんか、内積っぽくない気がする」

　私は率直に、定義を見てそう言った。

「え？　そう？」

「内積ってさ、つまり……『大きさ』と『向き』を測るものでしょ？　交代形式の大きさって、何なんだろうって思って」

「……あ、そうか。確かに、大きさと向きかぁ。少し待って……」

　あかりはホワイトボードマーカーを置き、少し目を瞑った。

「そもそも、交代形式というのは、k 次元の体積を測るためにあると考えることができる。ここで、n 次元空間内で、k 次元の単位立方体は、${}_nC_k$ 個、直交なものがあるよね」

「……えっと？　どういうこと？」

「例えば、3 次元空間で考えよう。この時、単位線分、つまり長さ 1 の線分は、3 つ、直交にとれるよね」

「まあ、そうだね」

「同じように、単位正方形を考える。すると……これも、3 つ、直交に取ることができる」

「ほうほう？」

「この時の選び方は $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ で張られる正方形および、$\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{e}_3$、$\boldsymbol{e}_3$ と $\boldsymbol{e}_1$ で張られる正方形

とできる。」

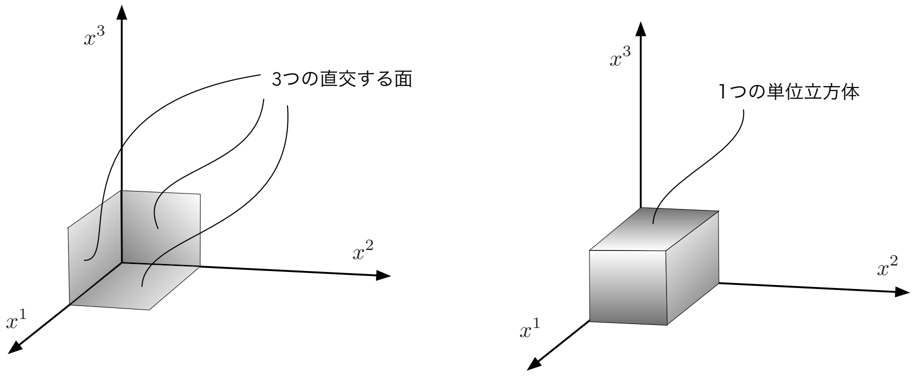

図 4.1　3 次元空間内には 3 つの直交した軸がある。そして、3 つの直交した単位面がある。単位面は 2 つの直交する単位ベクトルを指定するため、${}_3C_2$ 個だけの直交単位面がある。これを n 次元空間へ一般化すると、k 次元単位体積は ${}_nC_k$ 個だけ直交するものがある

あかりはさらに図を描いた。3 つの基底ベクトルのうち、2 つを選ぶことで、単位正方形を作ることができる……

「このように、3 次元空間内では 3 つの直交する単位面がある。ここで 3 次元空間内の 2 次交代形式を考える」

$$\begin{aligned} \eta &= \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= i_x dy \wedge dz + i_y dz \wedge dx + i_z dx \wedge dy \end{aligned} \tag{4.6.19}$$

「電流密度かな？　ああごめん、あくまでも解釈でしかないけど」

「そう解釈してもいいよ。ここで

$$\begin{aligned} \eta(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) &= i_z \\ \eta(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) &= i_x \\ \eta(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) &= i_y \end{aligned} \tag{4.6.20}$$

という関係があるよね。これは微分形式の成分にもなってる」

「確かに」

「このように、『直交する k 次元単位立方体を代入した値』が、微分形式の成分となる。ここで逆転の発想……いや、逆転はしてはないんだけど。逆に、k 次交代形式を『直交する単位立方体に対して、重み付けをするもの』と捉える」

「重み付け……！　なんか積分ぽいね！」

「……あぁ、確かにね。ここで、内積への『大きさ』という考え方が生まれる。すなわち、『直交する単位立方体に対するそれぞれの重み付けの、2 乗和』だ」

$$\langle \eta, \eta \rangle = i_x^2 + i_y^2 + i_z^2 = |\boldsymbol{i}|^2 \tag{4.6.21}$$

「あー、そう考えるのか！　電流密度だったら、『その面を通る単位時間あたりの電気量』が重み付けになるのか！　なるほどねぇ」
「……正直なところ、私はこの意味づけが正しいのかわからない。正しくても、それが役に立つのかもわからない。内積の条件を満たしていそうだな、ってことしか私は確かめていなかった」
　そうなのか。あかりのことだからなんでも知っていると思っていたけれど……。確かに、数学としてはあまり意味のないことなのかもしれない。けれど微分形式や交代形式に意味がある以上、内積にも意味があるはずだ……この考えで、合っているのだろうか。
「話を戻すけれど……この定義にも well-defined 性を確かめる必要がある。なぜなら、1 つの正規直交基底 $\{\alpha^{(\mu)}\}$ を選んで、定義しているから。もし別の正規直交基底 $\{\beta^{(\mu)}\}$ で定義した時も、内積の結果は同じであってほしい。そうでないと、これは定義として不十分だ」
「あ、確かに。基底を変えても $\langle\omega,\eta\rangle$ の値は変わらない方がいいよね」
「その通り。……どうやって確かめようか」
「んー……$\beta^{(\mu)}$ と $\alpha^{(\nu)}$ たちの関係を考えないといけないよね」
「そうだね。$\beta^{(\mu)}=\sum_{\nu=1}^{n}c^{\mu}_{\nu}\alpha^{(\nu)}$ を考えると、c^{μ}_{ν} を (μ,ν) 成分とする行列は直交行列となる。あとは、$\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}$ の添字の反対称性による $k!$ のダブりを考慮すればいい。これは、あおいへの宿題にしようかな」
「えーっ！　夏休みの宿題も終わってないのに！」
「おい……」

4.6.3　体積形式と Hodge 双対

「次に、体積形式を定義する」

> $\omega_V\in\Omega^n(V)$ を、V^* の正規直交基底 $\{\alpha^{(\mu)}\}$ を用いて
>
> $$\omega_V=\alpha^{(1)}\wedge\cdots\wedge\alpha^{(n)} \tag{4.6.22}$$
>
> で定義する。これを**体積形式**という。

「ふむふむ。n 次元単位立方体に対して、1 を返すようなやつだね。……あれ、でもこれも well-defined 性を考えないといけないよね」
「そうだけれど、これはプラスマイナスだけの不定性がある。さっきの基底変換 $\beta^{(\mu)}=\sum_{\nu=1}^{n}c^{\mu}_{\nu}\alpha^{(\nu)}$ を考える時、c^{μ}_{ν} を (μ,ν) 成分とする行列は直交行列で、そしてその行列式が ±1 だからね。だから…ここでは、ある 1 つの符号を取り、そっちをプラスだとして考える」
「ふぅん？　まあ、3 次元空間だと $\omega_V=dx\wedge dy\wedge dz$ ってすれば良さそうだけども」
「そう。ここで、一般的な双対基底 $\{\sigma^{\mu}\}$ を使って、体積形式を展開してみよう。まず、正規直

交基底との関係はこのようなものであるとする。

$$\alpha^{(\mu)} = a^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu} \tag{4.6.23}$$

こうすると、$\widetilde{g}(\sigma^{\mu}, \sigma^{\nu}) = g^{\mu\nu}$ より、

$$\widetilde{g}(\alpha^{(\mu)}, \alpha^{(\nu)}) = \delta^{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\rho}a^{\nu}{}_{\sigma}g^{\rho\sigma} \tag{4.6.24}$$

つまり、$a^{\mu}{}_{\nu}$ を (μ, ν) 成分とする行列 a を考えると、これは

$$I = ag^{-1}a^{\top}\text{すなわち}\quad g = a^{\top}a \tag{4.6.25}$$

ということを表している。ここで g は $g_{\mu\nu}$ を (μ, ν) 成分とする行列とする。$g^{\mu\nu}$ は g^{-1} の (μ, ν) 成分だから、これでいい。これを使うと、

$$\det g = \det a^2 \tag{4.6.26}$$

ってことがわかる。これを準備として……体積形式を考えよう

$$\begin{aligned}
\omega_V &= \alpha^{(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(n)} \\
&= \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_n} a^{1}{}_{\nu_1} \cdots a^{n}{}_{\nu_n} \sigma^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\nu_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a^{1}{}_{\sigma(1)} \cdots a^{1}{}_{\sigma(n)} \sigma^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a^{1}{}_{\sigma(1)} \cdots a^{1}{}_{\sigma(n)} \sigma^{1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{n} \\
&= \det(a)\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n
\end{aligned} \tag{4.6.27}$$

というように、行列式が出てくる。ゆえに、

$$\omega_V = \sqrt{\det g}\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n \tag{4.6.28}$$

と、書くことができる。これが一般的な基底における、体積形式だ」

「へぇ。計量がわかれば、体積形式を表すことができるんだ！」

「その通り。ここで $\det(a) > 0$ としたけれど……その基底のとり方を、正の向きとする」

「ふむふむ。……ん？　そういえば、内積を一般的な座標で表すとどうなるんだっけ？」

「読者への演習問題としよう。答えはこうなる」

$$\langle \omega, \eta \rangle = \frac{1}{k!} \sum_{\mu, \nu} g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_1\nu_1} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} \eta_{\nu_1 \cdots \nu_k} \tag{4.6.29}$$

「ここの合計は $\mu_1, \cdots, \mu_k, \nu_1, \cdots, \nu_k$ を 1 から n まで足し上げることを意味する。それぞれの成分で、内積を取っていると考えることができるね。次に、……また定義だけど、Hodge 双対を定義する」

$\omega, \eta \in \Omega^k(V)$ に対して、

$$\langle \omega, \eta \rangle \, \omega_V = \omega \wedge \star\eta \tag{4.6.30}$$

となる $\star\eta \in \Omega^{n-k}(V)$ を η の **Hodge 双対**という。

「まず初めに、これが定義となっていることを確かめよう。以上のように $\star\eta$ となる $n-k$ 形式が α_1, α_2 の 2 つがあったとする。このとき、$\alpha_1 = \alpha_2$ であることが確かめれば、これは定義になっている」

「定義になってるかどうかも確かめないといけないんだ……定義をするだけでも証明が必要だなんて」

「この証明は簡単だけどね。任意の $\omega \in \Omega^k(V)$ に対して、$\omega \wedge \alpha = 0$ を満たす $\alpha \in \Omega^{n-k}(V)$ は、$\alpha = 0$ のただ 1 つしかないことを利用すればいい」

　そう言って、あかりは証明を書いた。以上を満たす $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^{n-k}(V)$ に対して、

$$\langle \omega, \eta \rangle \, \omega_V = \omega \wedge \alpha_1 = \omega \wedge \alpha_2 \tag{4.6.31}$$

より、wedge 積の線型性から

$$\omega \wedge (\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \tag{4.6.32}$$

となる。これが任意の $\omega \in \Omega^k(V)$ で成立するため、$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ ゆえに $\alpha_1 = \alpha_2$ となる。したがって、Hodge 双対の定義は一意的に行われる。

「以上、証明終了。何か質問は？」

「んー。あかりの最初に言ったことの証明が気になる。任意の $\omega \in \Omega^k(V)$ に対して $\omega \wedge \alpha = 0$ ならば、$\alpha = 0$ ってやつ」

「それに関してはある基底をとって、成分表示すれば簡単に確かめられる。このくらいは演習問題でいいよね。定義ができたら、性質を考えよう。まずわかるのが線形性だね。

$$\begin{aligned} \star(a\omega) &= a \star \omega \\ \star(\omega + \eta) &= \star\omega + \star\eta \end{aligned} \tag{4.6.33}$$

つまり、$\star : \Omega^k(V) \to \Omega^{n-k}(V)$ は線形写像となっている。だから、基底の変換を見れば $\star$ の計算ができる。一般的な基底では、こうなる」

$$\star \left(\sigma^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\mu_k} \right) = \frac{\sqrt{\det g}}{(n-k)!} \sum_{\mu_{k+1}, \cdots, \mu_n} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\mu_{k+1} \cdots \mu_n} \sigma^{\mu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\mu_n} \tag{4.6.34}$$

ここで

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\mu_{k+1}\cdots\mu_n} &= \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_k\nu_k}\varepsilon_{\nu_1\cdots\nu_k\mu_{k+1}\cdots\mu_n} \\ &= \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_k} g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_k\nu_k}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}\nu_1 & \cdots & \nu_k & \mu_{k+1} & \cdots & \mu_n \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.6.35}$$

だ。特に $\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n} = \det(g^{-1})\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$ という関係があり

$$\begin{aligned}\star 1 &= \sqrt{\det g}\frac{1}{n!}\sum \varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}\sigma^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{\mu_n} \\ &= \sqrt{\det g}\sigma^1\wedge\cdots\wedge\sigma^n = \omega_V\end{aligned} \tag{4.6.36}$$

というように、1 の Hodge 双対は ω_V になる。そして n 次元において、k 形式に対する二重 Hodge 双対は

$$\star^2 = (-1)^{k(n-k)} \tag{4.6.37}$$

が成立する」

「この k は $\star$ を作用させる時の微分形式のグレードだよね。k 次微分形式に作用させる時は、そうするってことだね」

「うん。特に n が奇数の時は $\star^2 = 1$ だ。ここで区切りがいいし、うん。少し休憩しようか」

「りょー」

　ノートにホワイトボードにある数式を書き記し、それを眺めながら返事をした。

4.6.4　Riemann 多様体の定義

　休憩を少しだけやって、私たちはまたホワイトボードの前に集まる。
「まだ時間はあるね。花火大会まで」
「……だけれど話せるのはアレまでかな。来週から学校だから、続きは学校始まってからだね」
「がっこ……。あーあー！　聞きたくないぃ。学校なんて嘘だぁ……今日の花火大会で、高校生活、最後の花を散らしてやるぅ！」
「散らすな……やるよ。さっきまでは単にベクトル空間内の話だった。これを、多様体上の話に拡張しよう。多様体の各点 $p \in M$ に、接ベクトル空間 T_pM があるよね。それぞれの接空間に、内積を定める」

> n 次元微分可能多様体 M の各点 p に $g_p \in T^0_2(T_pM)$ が内積となるように定めるテンソル場 g が存在するとき、g を M 上の Riemann 計量という。
> また、Riemann 計量の入った多様体 (M, g) を Riemann 多様体という。

「Riemann 多様体……内積が入った、多様体って感じだね。特に難しい定義があるわけじゃないんだ！」
「そうだね。1 つ 1 つ、曖昧さを排除して、複雑なものを整理していけば、難しくない。少なくとも、あおいには『道具としての数学』を教えてるつもりだから。使えないと意味がない。……計量を座標表示したら、もちろんこうなるよね」

$$g = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{4.6.38}$$

「そだね。特に難しいことはない気がするね」
「うん。……あおいには、まずこの計量の使い方を知ってもらうことにしよう。多様体上で、ある曲線 $c : (a, b) \to M$ があったとする。この時、$t = a$ から $t = b$ まで、この曲線の長さは、どのように表されるか？」
　曲線の長さ。確か 6 月にやった。確か……そう。曲線をパラメーター表示して、速度ベクトルの大きさをとって、それを積分していたんだった。今回の場合、すでに曲線はパラメーター t が入っている。速度ベクトルは $\dfrac{dc}{dt}$ で……その大きさは、計量を使えばわかるんだった！
ということは……

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)}\, dt \tag{4.6.39}$$

「こうじゃないかな？　あかり！」
「正解。あおいには難しくなかったね。このように、Riemann 計量を使えば、曲線の長さを考

えることができる。あとは音楽同型も、Hodge 双対も同様に考えることができる。ただ、ベクトル場や、微分形式は点を指定するものだった」
「どっちも『場』だもんね」
「そう。ただ、どれも自然に定義する」

$\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M),\ \sharp : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M),\ \star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ を、$p \in M$ に対して

$$\begin{aligned}(\flat \boldsymbol{X})_p &= \flat \boldsymbol{X}_p \\ (\sharp\alpha)_p &= \sharp\alpha_p \\ (\star\omega)_p &= \star\omega_p\end{aligned} \tag{4.6.40}$$

と定義する。

「あー、フラットのその点のやつは、その点のやつのフラット……みたいな？　うまく言葉にできないんだけれど」
「そうだね。多様体の点 p を代入する演算子があるとしたら、それと可換になるように定義する。ただ、微分形式の内積についてはこのように定義し直そうか。

$$(\omega, \eta)_M = \int_M \langle \omega, \eta \rangle \, \omega_V = \int_M \omega \wedge \star\eta \tag{4.6.41}$$

「ふーん？　積分するんだ。なんかよくわからないね」
「内積の値そのものにはたぶん意味がないと思う。あくまでこれは数学的な道具で、物理的な意味はそんなにない。けれど、この量の解析的な振る舞いを見ることは、面白い。きっと、物理でもね」
「ほぉー？　どういうこと？」

4.6.5　余微分

「それを見ていこう。**共役微分作用素**、もしくは**余微分**をこのように定義しよう」

$\omega \in \Omega^k(M)$ に対して、$\delta\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ を

$$\delta\omega = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star \omega \tag{4.6.42}$$

と定める。これを ω の**余微分**と呼び、$\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ を**共役微分作用素**と呼ぶ。

「えーと……これは、k 形式を $k-1$ 形式にするんだね！　……でも、このマイナスは何？」
「少し都合よく定義している。ちょっと、この計算をするよ

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \star\beta) &= d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^{k-1}\alpha \wedge d \star \beta \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{k-1}(-1)^{(n-k+1)(k-1)}\alpha \wedge \star(\star d \star \beta) \\ &= d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^{n(k+1)}\alpha \wedge \star(\star d \star \beta) \end{aligned} \tag{4.6.43}$$

これを書きやすく

$$d\alpha \wedge \star\beta = \alpha \wedge \star(\delta\beta) + d(\alpha \wedge \star\beta) \tag{4.6.44}$$

としただけだね」
「んんー……なんだろ。パッとイメージが浮かばない……。だから何？　って感じがする」
「もう少し考察しようか。内積の定義を使うと

$$(d\alpha, \beta)_M = (\alpha, \delta\beta)_M + \int_{\partial M} i^*(\alpha \wedge \star\beta) \tag{4.6.45}$$

こうすればわかりやすくなるんじゃないかな？　ここで包含写像 $i : \partial M \to M$ で、Stokes の定理を使った」
「んー……内積が確かに、なんかわかりやすくなったけど、えーと……」
「$i^*\alpha = 0$ もしくは $i^* \star \beta = 0$ という関係があるとしたら、共役関係として

$$(d\alpha, \beta)_M = (\alpha, \delta\beta)_M \tag{4.6.46}$$

が成立している。双対関係だ」
「おおっ。左辺の d が右辺の δ になってる。……何その条件？」
「$i^*\alpha = 0$ は、境界の法線方向にのみ α は値を持つということ。そして $i^* \star \alpha = 0$ は、接線方向しかないってことを意味する」

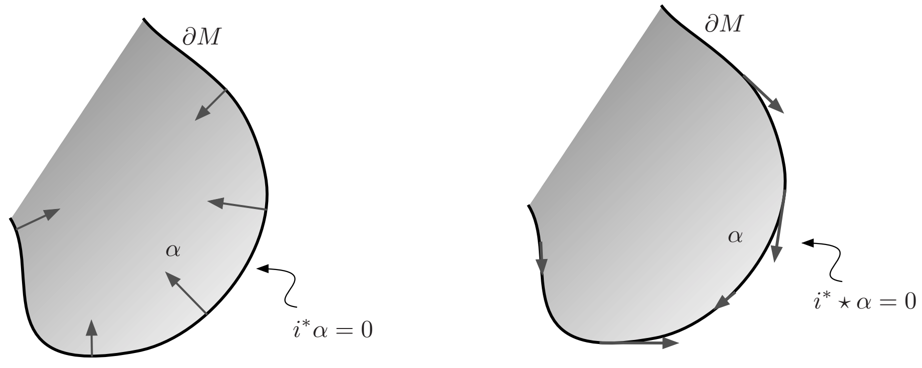

図 4.2　$i^*\alpha = 0$ および $i^* \star \alpha = 0$ の条件を図示した。簡単のため、α を 1 次微分形式として、ベクトルのように表した。

そう言ってあかりは図を書いてくれた。そうか！　Hodge 双対はそういう風に使うこともできるのか！　境界条件！
「まさに、Hodge 双対や余微分は、幾何と解析の概念を結びつける道具なんだ」
「法線方向にしかないっての、なんか電場っぽい！　金属の表面に対しては、垂直方向にしか電場がないし！　確か磁場って境界面では平行にしかないんだったよね……？　そっか。Hodge 双対、使える子だね！」

4.6.6　ベクトル解析との対応

「うん、じゃあ、この勉強会の目的。3 次元ベクトル解析との対応を見て行こうか」
「お！　きました！　ベクトル解析！　$\mathbb{R}^3$ を 3 次元の多様体として考える。ってことでいいんだよね！？」
うん、そう。と言ってあかりはホワイトボードに定義を書く。

$$g(X, \mathrm{grad}f) = df(X), \ X \in \mathfrak{X}(M) \tag{4.6.47}$$

となるベクトル場 grad$f$ を、f の勾配という。音楽同型と組み合わせれば、こう書ける」

$$\mathrm{grad}f = \sharp df \tag{4.6.48}$$

「grad$f$ はベクトル場になるんだね。成分で書いたら、えっと……

$$\mathrm{grad}f = \sum_{i,j=1}^{3} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{4.6.49}$$

だね。確かに、3 次元の正規直交基底だったら、それぞれの成分を微分するだけになってる！」
「うん。次に、発散を定義する。発散とはなんだったか？　**体積の変化率**だ。ベクトル場 X に対してその流れ、すなわちフローが、体積形式にどれだけ影響があるか？　つまり div$X$ という関数は

$$L_X \omega_V = (\mathrm{div}X)\omega_V \tag{4.6.50}$$

で定義されるんだ。n 次微分形式だから ω_V の関数倍となるはずなので、定義にはなっている」
「これはイメージしやすいね！」

「実際にこれを計算する。Cartan の公式を使うと $d\omega_V = 0$ だから

$$\begin{aligned} L_X\omega_V = di_X\omega_V &= d\left(\sum_i(-1)^{i+1}X^i\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\hat{dx^i}\cdots\wedge dx^n\right) \\ &= \sum_i(-1)^{i+1}\frac{\partial X^i\sqrt{|g|}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^1\wedge\cdots\hat{dx^i}\cdots\wedge dx^n \\ &= \sum_i\frac{\partial X^i\sqrt{|g|}}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_i\frac{\partial X^i\sqrt{|g|}}{\partial x^i}\omega_V \end{aligned} \tag{4.6.51}$$

以上より

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^i\sqrt{|g|}\right) \tag{4.6.52}$$

これが、発散の座標表示になる」

「おお！　$|g| = 1$ とかやれば、3 次元の時と同じ感じだね！　じゃあさじゃあさ、回転は！？　どうなるの？」

「……そもそも、外積が 3 次元でしか定義されていないからね。ただ、似たようなものは定義できる。1 形式の外微分が、回転のようなものだってことは、Stokes の定理を考えたり、成分を考えればわかりやすいよね。ベクトル場からベクトル場を返すとしたら、こうなる。

$$\mathrm{rot}X = \sharp\star d\flat X \tag{4.6.53}$$

3 次元だけで定義されていることに注意してね」

「なんかすっごい変なものになったねぇ……」

「確かにね。それに、Stokes の定理が適用できる形でもない。その形にするにはもう少し色々と考えないといけない」

確かに、Stokes の定理は

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$$

だった。$\sharp$ や $\star$ が色々あるから、それをうまく外してあげないといけなさそうだ……あ、微分形式の内積とか使えば、なんとかなるかな？　わからないけど。

「同じように発散を書くなら、こうなるね」

$$\mathrm{div}X = -\delta\flat X \tag{4.6.54}$$

「証明！」

と言って、私はノートに向かい合う。

$$\begin{aligned}-\delta\flat X &= -\delta\left(X^i g_{ij} dx^j\right)\\ &= -(-1)^{3(1+1)+1} \star d \star \left(X^i g_{ij} dx^j\right)\\ &= \frac{1}{2} \star d \left(X^i \sqrt{g} g_{ij} \varepsilon^j{}_{kl} dx^k \wedge dx^l\right)\\ &= \frac{1}{2} \star \frac{\partial}{\partial x^m}\left(X^i \sqrt{g}\right) \varepsilon_{ikl} dx^m \wedge dx^k \wedge dx^l\\ &= \frac{1}{2} \star \frac{\partial}{\partial x^m}\left(X^i \sqrt{g}\right) \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mkl} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(X^i \sqrt{g}\right) \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mkl}\end{aligned} \tag{4.6.55}$$

「えーと……$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mkl} = 2\delta_{im}$ だから、

$$-\delta\flat X = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(X^i \sqrt{g}\right) = \mathrm{div}X \tag{4.6.56}$$

よし！」

「うん。ベクトル解析との関連についてはこの辺りでいいかな」

4.6.7　ラプラシアン

「あ、でももう一個あったよね」

「何が？」

「えっと……そうだ、ラプラシアン！」

ああそうだったね、と言いながらあかりはホワイトボードにペンを走らせる。

$$\boxed{\triangle = -(d\delta + \delta d) \tag{4.6.57}}$$

「このように、定義しよう」

「ほうほう！？　なんか、発散と勾配でラプラシアン書けてたよね！　$\delta f = 0$ だから」

$$\triangle f = -\delta d f = -\delta\flat\,\sharp d f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} f \tag{4.6.58}$$

「そうだね。それと、3 次元のベクトル場を考えれば

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}X - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}X &= -\sharp d\,\delta\flat X - \sharp\star d\flat\,\sharp\star d\flat X\\ &= -\sharp(d\delta + \delta d)\flat X\\ &= \sharp\triangle\flat X\end{aligned} \tag{4.6.59}$$

となる。少し変えると

$$\triangle\flat X = \flat(\mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot})X \tag{4.6.60}$$

そして、1 形式だと

$$\sharp\triangle\alpha = (\mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot})\sharp\alpha \tag{4.6.61}$$

になる」
「うわぁっ。目がちかちかするような式だねっ……って！　そっか！　ベクトル場の時はこうなってるんだったね！」
「そうそう。そうだった。電磁気の時もそこまで話してたね。もちろん、この式は 3 次元解析の時しか使えないから気をつけてね。じゃあ、ここらで終わりにしようか」
　あかりのその言葉を聞いて、もう一度ノートを確認して、それを閉じた。
「ありがとう！　面白かった！」
「はいはい。じゃあ、花火行こうか」
　あかりは「手を洗ってくる」と部屋を出た。私も荷物をリュックに詰め込む。……これは、置いて行こうか。お祭りの会場からそんなに遠いわけじゃないし。