(特殊)Lorentz 変換の導出

ほたる

平成 30 年 6 月 16 日

1　はじめに

…　ある日の主婦と娘の会話
「ただいまー」
「お帰りなさい、物子。遅かったわね。」
「お母さん、今日ね、数太君と追いかけっこしてる時にね、数太君が私のこと痩せてるねって言ってくれたのよ」
「あらいいわね、でもそれは Lorentz 収縮の可能性があるわ。あなたがやせたわけじゃないかもよ。結構ハイスピードな鬼ごっこしたんじゃない？」
「たしかに！今日は地球何周もしちゃったよ。ろーれんつしゅうしゅくってなに」
「間違いないわ。いい質問ね。じゃあまず Lorentz 収縮を説明するためにまず Lorentz 変換の導出をしてみるわよ」

ということで，Lorentz 変換の導出を試みたいと思います．間違い指摘質問等あれば Twitter 等でお知らせください．できる限り対応したいです．あと,（やる気と時間があれば）今後更新するかもしれません．

ここから口調が変わりますが，今回の約束として， 特に断らない限りギリシャ文字を用いた際は 0 から 3（座標の場合 0 は時間成分，1 から 3 は空間成分を表す）までの値をとるものとする．また Einstein の縮約記法を採用する．すなわち同じ添え字が同一の項に出てきた場合 0 から 3 まで足しあげるものとする．

2　指導原理

今回採用する指導原理は以下 4 つ．

(i) 慣性の法則
力を受けていない物質は静止または等速運動をする．そのような系を慣性系という．

(ii) 光速不変の原理
真空中の光の速さは光源の運動状態に依らない．この速さを c とおく．

(iii) 特殊相対性原理
任意の慣性系から見て物理法則は変わらない．

(iv) 時空の一様等方性
時間及び空間は一様かつ等方的．すなわち時空並進や空間回転に対して物理法則は変わらない．

慣性基準系 S 系に対して x 軸方向に速さ v で等速運動をしている座標系 S' を考える．また t を S 系での時刻，t' を S' 系における時刻としたとき両方の系において時刻 0 において原点と x 軸 y 軸 z 軸が一致しており軸の向きは変化せず運動しているとする．すなわち変換前後の xy 平面と xz 平面は一致しているとする．S 系及び S' 系における時間及び座標をまとめて時空座標といいそれぞれ $x^\mu = (ct, x, y, z)$，$x'^\mu = (ct', x', y', z')$ で表す $(\mu = 0, 1, 2, 3)$．このとき S' 系は慣性系である．なぜならば S 系で慣性の法則にしたがい運動する物質は時空の一様性より S' 系から見て時空座標によらず一様な運動をする，すなわち慣性運動するためである．S 系から S' 系への変換は慣性系同士の変換性をあたえこのような変換を Lorentz 変換という[1]．

3 導出 1 (Einstein の方法)

(i) Lorentz 変換が線形変換で表されること

時空の一様等方性から任意の四元ベクトル a^μ だけ一様に時空並進 $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$ したとしても変換則は変わらない．すなわち Lorentz 変換を $L^\mu_{\boldsymbol{v}}(x) \equiv L^\mu_{\boldsymbol{v}}(x^0, \boldsymbol{x}) \equiv x^{\mu\prime}$ としたとき

$$L^\mu_{\boldsymbol{v}}(x) + L^\mu_{\boldsymbol{v}}(a) = L^\mu_{\boldsymbol{v}}(x + a) \tag{1}$$

が成立する．ここで $L_{\boldsymbol{v}}$ に滑らかさを要請すれば[2]両辺を x^μ，a^ν で微分すれば（左辺は 0 となるため右辺は微分可能である）

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 L^\rho_{\boldsymbol{v}}(x+a)}{\partial x^\mu \partial a^\nu} && (2) \\ &= \frac{\partial^2 L^\rho_{\boldsymbol{v}}(x+a)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} && (3) \end{aligned}$$

最後に微分を $a^\mu = 0$ において行えば

$$\frac{\partial^2 L^\rho_{\boldsymbol{v}}(x^\mu)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$$

が得られ $L^\rho_{\boldsymbol{v}}(x^\mu)$ の関数形は x^μ の一次式で与えられることがわかった．そのため $a^\mu{}_\nu$ を定数とし $L^\mu_{\boldsymbol{v}}(x) = a^\mu{}_\nu x^\nu$ とおく．

(ii) 不変距離

時刻 $t = t' = 0$ において S 系にある原点にある光源から光が一瞬でたとする．このとき S 系の P(x,y,z) に時刻 t に光源からの光が到達したとする．このとき世界距離[3]s^2 を

$$s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{4}$$

で定義すればこれらは $s^2 = 0$ を満たす．光速不変の原理から S' 系からみて光源からでた光に速さは同じであるので S 系において P と同一点同一時刻を $(x', y', z'), t'$ とすれば

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \tag{5}$$

が成立する．

ここで $s = 0$ ならば $s'^2 = 0$ 及び Lorentz 変換が 1 次変換で与えられることことから任意の点ので $s^2 = \alpha(\boldsymbol{v}) s'^2$ が成立する．ここに $\alpha(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ のみの関数である．実際，s'^2 は Lorentz 変換を用いて $s'^2 = as^2 + (x, y, z, t$ の 2 次式$)$ のように書くことができるが，例えばある t に関して $s^2 = 0$ を満た

[1] もちろん原点は一致していなくても時空の一様性から時空並進操作を行えば原点一致の際の変換に帰着される．時空並進を含めた変換を *Poincaré* 変換という．

[2] もし滑らかでないと仮定すればその点を通る慣性運動をする物質を考えれば加速度無限大となり慣性の法則に反する．

[3] これは正定値でないため数学でいう距離にはなっていない

す空間座標は $(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を満たす任意の座標であるので ${s'}^2$ のうち s^2 の 1 次項以外の係数は 0 となる． さらに空間の等方性から $\alpha(\boldsymbol{v})$ は速さ v のみの関数となる．すなわちどちらの方向に動いても s^2 の変換則は変わらないということである．(s^2 は空間的に等方的な量であるためどの方向に移動した慣性系から見ても比例係数は同じはずである) 更に $\alpha(v)$ は速さのみに依存することがわかったので ${s'}^2 = \alpha(v)s^2$ が成立．よって $\alpha(v)^2 = 1$ すなわち $\alpha(v) = \pm 1$ が成立する．ここで $\lim_{v\to 0} \alpha(v) = 1$ より $\alpha(v) = 1$ である．よって任意の点について

$$s^2 = {s'}^2 \tag{6}$$

が成立していることがわかった．

(iii) y，z の変換性

変換前後の xy 平面と xz 平面は一致しているという仮定より $y = 0$ なら $y' = 0$，$z = 0$ なら $z' = 0$ が成立しなければならない．ゆえに Lorentz 変換は 1 次変換であることから $y' = a(\boldsymbol{v})y$，$z' = a(\boldsymbol{v})z$ が成立しなければならない．ここに $a(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ に依存した比例定数であり空間の等方性から y と z の変換性は同一とした．v=0 で y 軸 z 軸について軸の向きが一致していることを用いて不変距離の議論と同様に $a(\boldsymbol{v}) = 1$ が結論付けられる．

(iv) x,t の変換性

まず S' 系の原点は S 系から見て時刻 t において (vt,0,0) であるので，

$$\begin{aligned} &{a^1}_0 ct + {a^1}_1 (vt) = 0 \\ &\therefore \frac{{a^1}_0}{{a^1}_1} = -\frac{v}{c} \equiv -\beta \end{aligned} \tag{7}$$

であることがわかる．ただし ${a^1}_1 = 0$ であるとき逆変換が存在しないため不適とした．(6) 式より y=0,z=0 とすれば

$$({a^0}_0 x^0 + {a^0}_1 x^1)^2 - ({a^1}_0 x^0 + {a^1}_1 x^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 \tag{8}$$

となりこれが任意の x 及び t に対して成立するので変換係数に関する以下の方程式

$$\begin{cases} ({a^0}_0)^2 - ({a^1}_0)^2 = 1 & (9) \\ {a^0}_0 {a^0}_1 = {a^1}_0 {a^1}_1 & (10) \\ ({a^1}_1)^2 - ({a^0}_1)^2 = 1 & (11) \end{cases}$$

が得られる．あとは計算あるのみである．まず (9) 式及び (11) 式に (7) 式を代入し

$$\begin{cases} ({a^0}_0)^2 = 1 + \beta^2 ({a^1}_1)^2 & (12) \\ ({a^0}_1)^2 = ({a^1}_1)^2 - 1 & (13) \end{cases}$$

であるので (12) 式及び (13) 式をかけ (10) 式，(7) 式を代入して

$$\begin{aligned} \beta^2 {a^1}_1 &= (1 + \beta^2 ({a^1}_1)^2)(({a^1}_1)^2 - 1) \\ \Leftrightarrow (1 - \beta^2) {a^1}_1 &= 1 \\ \therefore {a^1}_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \tag{14}$$

これを (7) 式に代入し $a^1{}_0 = \mp\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ がえられる．ここで $a^1{}_1$ と $a^1{}_0$ の符号は同順である．(12) 式 (13) 式から $a^0{}_0$ 及び $a^0{}_1$ の値がわかるので結局，

$$
\begin{cases}
ct' = \pm\dfrac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} & (15)\\
x' = \pm\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} & (16)
\end{cases}
$$

が得られる．今のところ，この式中の $\pm$ の組み合わせに制限はない．しかし $v \to 0$ で恒等変換に帰着するためにはプラス符号をとる必要があるので，すべてまとめて

$$
\begin{cases}
ct' = \dfrac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} & (17)\\
x' = \dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} & (18)\\
y' = y & (19)\\
z' = z & (20)
\end{cases}
$$

が得られる．

よって Lorentz 変換の得たい表式が得られた．

参考文献

[1] 内山龍雄『相対性理論入門 (物理テキストシリーズ ８)』岩波書店

[2] https://ameblo.jp/metazatunen/entry-11714063955.html