Wick の定理

nun

2018 年 6 月 20 日

1　目的

正準形式における Wick の定理の証明．Wick の定理は次の展開である．

$$
\begin{aligned}
&T\{ABCD\cdots WXYZ\} \\
&=N[AB\cdots YZ] \\
&\quad+\sum_{1-\mathrm{pairs}} N[AB\cdots\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots\cdots YZ] \\
&\quad+\sum_{2-\mathrm{pairs}} N[AB\cdots\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots YZ] \\
&\quad+\sum_{3-\mathrm{pairs}} N[AB\cdots\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\ \underbracket{\cdots\cdots}\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots YZ] \\
&\quad+\cdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$\ell-\mathrm{pairs}$ は Wick 縮約を ℓ 個，可能な全てのとり方でとることを表す．

2　準備

2.1　定義

- 交換関係
$$[A,B]\equiv AB-BA$$
- 反交換関係
$$\{A,B\}\equiv AB+BA$$
- 冪集合
$$\mathfrak{P}(A)\equiv\{X|X\subset A\}$$
- 1 から n までの自然数
$$N_n\equiv\{1,2,\cdots,n\}$$

- 総積の積の順番

$$\prod_{i \in N_n} A_i \equiv A_1 A_2 \cdots A_n$$

  添字の順序 (今回は自然数の大きさ $<$ の順序) の大きいものを右に並べるように取る

- 正規積

$$N[\prod_{i \in N_n} A_i] \equiv \sum_{B \in \mathfrak{P}(N_n)} \left\{ \left(\prod_{i \in B} A_i^- \right) \left(\prod_{j \in N_n - B} A_j^+ \right) \right\}$$

- 置換 σ_n

  $\sigma_n : N_n \to N_n$ であって，全単射である写像.

- S_n：全ての置換の集合.
- 時間順序化積 (T 積)

$$T\{\prod_{i \in N_n} A_i\} \equiv \sum_{\sigma_n \in S_n} \left[\left(\prod_{i \in N_n} A_{\sigma_n(i)} \right) \left(\prod_{j \in N_{n-1}} \theta(t_{\sigma_n(j)} - t_{\sigma_n(j+1)}) \right) \right]$$

  t_i は演算子 A_i の時間のことを表す.

- nun 縮約

$$\overbracket{AB} \equiv \langle 0 | AB | 0 \rangle$$

- Wick 縮約

$$\underbracket{AB} \equiv \langle 0 | T\{AB\} | 0 \rangle$$

演算子の交換関係等

次を認める．ϕ はボソン場．ψ はフェルミオン場．$\bar{\psi}$ は ψ のディラック共役 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$．それぞれの平面波解を $\phi = \phi^+ + \phi^-$，$\psi = \psi^+ + \psi^-$，$\bar{\psi} = \bar{\psi}^- + \bar{\psi}^+$ とし，ϕ^+ は消滅演算子，ϕ^- は生成演算子．ψ^+ は粒子の消滅演算子．ψ^- は反粒子の生成演算子．$\bar{\psi}^-$ は粒子の生成演算子．$\bar{\psi}^+$ は反粒子の消滅演算子．を表すものとする．

$$[\phi^\pm(x), \phi^\mp(y)] = i \triangle^\pm (x - y) \tag{2}$$

$$\{\psi^\pm(x), \bar{\psi}^\mp(y)\} = iS^\pm(x - y) \tag{3}$$

ここで $\triangle^\pm(x)$ と $S^\pm(x)$ は伝搬関数．(ゼロでなく) 演算子を含まない.

上以外の組み合わせでは，ボソン場同士，ボソン場とフェルミオン場の交換関係は全て０，フェルミオン同士は反交換関係が０．また，異なる種類のボソン場は全ての組み合わせの交換関係が０，異なる種類のフェルミオン場は全ての組み合わせの反交換関係が０.

3 証明

3.1 ストーリー

次の４つの式を上から倒していく．

おやぶんゴースト

$$AB - N[AB] = \overbracket{AB} \tag{4}$$

ジャミとゴンズ

$$\begin{aligned} N[A_1 \cdots A_n]A_{n+1} =& N[A_1 \cdots A_n A_{n+1}] \\ &+ \sum_{k \in N_n} N[A_1 \cdots \overbracket{A_k \cdots A_n A_{n+1}}] \end{aligned} \tag{5}$$

ゲマ

$$\begin{aligned} &A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n \\ &\quad = N[A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \sum_{1-\mathrm{pairs}} N[A_1 A_2 \cdots\cdots \overbracket{\cdots\cdots}\cdots\cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \sum_{2-\mathrm{pairs}} N[A_1 A_2 \cdots\cdots \overbracket{\cdots\cdots}\cdots \overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \sum_{3-\mathrm{pairs}} N[A_1 A_2 \cdots\cdots \overbracket{\cdots\cdots}\cdots \overbracket{\cdots\cdots}\cdots \overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

ミルドラース

$$\begin{aligned} &T\{A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n\} \\ &\quad = N[A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \sum_{1-\mathrm{pairs}} N[A_1 A_2 \cdots\cdots \underbracket{\cdots\cdots}\cdots\cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \sum_{2-\mathrm{pairs}} N[A_1 A_2 \cdots\cdots \underbracket{\cdots\cdots}\cdots \underbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \sum_{3-\mathrm{pairs}} N[A_1 A_2 \cdots\cdots \underbracket{\cdots\cdots}\cdots \underbracket{\cdots\cdots}\cdots \underbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1} A_n] \\ &\qquad + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

3.2　おやぶんゴーストが　あらわれた！

式 (4)

$$AB - N[AB] = \wick{\c A \c B}$$

の証明.
AB が同種のボソンの時.

$$\begin{aligned} AB - N[AB] &= A^+B^- - B^-A^+ \\ &= [A^+, B^-] \\ &= i\triangle^+_{AB} = \langle 0|i\triangle^+_{AB}|0\rangle = \langle 0|[A^+, B^-]|0\rangle \\ &= \langle 0|A^+B^-|0\rangle = \langle 0|AB|0\rangle = \wick{\c A \c B} \end{aligned} \tag{8}$$

AB が粒子と反粒子のフェルミオンの時.

$$\begin{aligned} AB - N[AB] &= A^+B^- + B^-A^+ \\ &= \{A^+, B^-\} \\ &= iS^+_{AB} = \langle 0|iS^+_{AB}|0\rangle = \langle 0|\{A^+, B^-\}|0\rangle \\ &= \langle 0|A^+B^-|0\rangle = \langle 0|AB|0\rangle = \wick{\c A \c B} \end{aligned} \tag{9}$$

上以外の場合では，交換関係がゼロであるから，式 (4) の両辺は明らかにゼロ．成り立っている．

おやぶんゴーストを　やっつけた！

3.3　ジャミが　あらわれた！

式 (5)

$$\begin{aligned} N[A_1 \cdots A_n]A_{n+1} =& N[A_1 \cdots A_n A_{n+1}] \\ &+ \sum_{k\in N_n} N[A_1 \cdots \wick{\c A_k \cdots A_n \c A_{n+1}}] \end{aligned}$$

の証明．$A_{n+1} \to$ あ がボソンの時．右辺第一項を移行した式を計算．

$$
\begin{aligned}
&N[A_1\cdots A_n]\,\text{あ} - N[A_1\cdots A_n\text{あ}]\\
&\quad= \sum_{P\in\mathfrak{P}(N_n)}\left[\left(\prod_{i\in P}A_i^-\right)\left(\prod_{j\in N_n-P}A_j^+\right)\text{あ}^- - \left(\prod_{i\in P}A_i^-\right)\text{あ}^-\left(\prod_{j\in N_n-P}A_j^+\right)\right]\\
&\quad= \sum_{P\in\mathfrak{P}(N_n)}\left(\prod_{i\in P}A_i^-\right)\left[\left(\prod_{j\in N_n-P}A_j^+\right)\text{あ}^- - \text{あ}^-\left(\prod_{j\in N_n-P}A_j^+\right)\right]
\end{aligned}
$$

一つ目の等号は正規積の展開と"あ$^+$"の方が打ち消して消えることから．
大かっこ [ ] の中身を計算する．$\displaystyle\prod_{j\in N_n-P}A_j^+ = \prod_{j\in N_m}C_j^+$ とする．

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{j\in N_m}C_j^+\right)\text{あ}^- - \text{あ}^-\left(\prod_{j\in N_m}C_j^+\right)\qquad&\\
=&C_1^+\cdots C_m^+\text{あ}^- - \text{あ}^-C_1^+\cdots C_m^+\\
=&C_1^+\cdots C_m^+\text{あ}^- - \text{あ}^-C_1^+\cdots C_m^+\\
&+(C_1^+\cdots C_{m-1}^+\text{あ}^-C_m^+) - (C_1^+\cdots C_{m-1}^+\text{あ}^-C_m^+)\\
&+(C_1^+\cdots C_{m-2}^+\text{あ}^-C_{m-1}^+C_m^+) - (C_1^+\cdots C_{m-2}^+\text{あ}^-C_{m-1}C_m^+)\\
&\ \vdots\\
&+(C_1^+\text{あ}^-C_2\cdots C_m^+) - (C_1^+\text{あ}^-C_2\cdots C_m^+)\\
=&C_1^+\cdots C_{m-1}^+[C_m^+,\text{あ}^-]\\
&+C_1^+\cdots C_{m-2}^+[C_{m-1}^+,\text{あ}^-]C_m^+\\
&+C_1^+\cdots C_{m-2}^+[C_{m-1}^+,\text{あ}^-]C_m^+\\
&\ \vdots\\
&+[C_1^+,\text{あ}^-]C_2\cdots C_m\\
=&\sum_{k\in N_m}\left(\prod_{\substack{j\in N_m-\{k\}\\ j<k}}C_j^+\right)[C_k^+,\text{あ}^-]\left(\prod_{\substack{j\in N_m-\{k\}\\ j>k}}C_j^+\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

二つ目の等号は二段目以降はゼロを足している．三つ目の等号は各段左の項とその一つ下の段の右の項を合わせれば良い．一番下の段の左の項は一番上の右の項と合わせる．

ここで"あ"と交換するものは交換関係がゼロ．それ以外はおやぶんゴーストの途中の計算と同様にして

$$
[C_k^+,\text{あ}^-] = \overline{C\ \text{あ}} \tag{11}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
&\left(\prod_{j\in N_m} C_j^+\right)\text{あ}^- - \text{あ}^-\left(\prod_{j\in N_m} C_j^+\right) \\
&\qquad = \sum_{k\in N_m}\left(\prod_{\substack{j\in N_m-\{k\}\\ j<k}} C_j^+\right)\overbracket{C_k\left(\prod_{\substack{j\in N_m-\{k\}\\ j>k}} C_j^+\right)\text{あ}} \\
&\qquad = \sum_{k\in N_n-P}\left(\prod_{\substack{j\in N_n-P-\{k\}\\ j<k}} A_j^+\right)\overbracket{A_k\left(\prod_{\substack{j\in N_n-P-\{k\}\\ j>k}} A_j^+\right)\text{あ}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&N[A_1\cdots A_n]\,\text{あ} - N[A_1\cdots A_n\text{あ}] \\
&= \sum_{P\in\mathfrak{P}(N_n)}\left(\prod_{i\in P} A_i^-\right)\left[\sum_{k\in N_n-P}\left(\prod_{\substack{j\in N_n-P-\{k\}\\ j<k}} A_j^+\right)\overbracket{A_k\left(\prod_{\substack{j\in N_n-P-\{k\}\\ j>k}} A_j^+\right)\text{あ}}\right] \\
&= N\left[\sum_{P\in\mathfrak{P}(N_n)}\left(\prod_{i\in P} A_i^-\right)\left[\sum_{k\in N_n-P}\left(\prod_{\substack{j\in N_n-P-\{k\}\\ j<k}} A_j^+\right)\overbracket{A_k\left(\prod_{\substack{j\in N_n-P-\{k\}\\ j>k}} A_j^+\right)\text{あ}}\right]\right] \\
&= \sum_{k\in N_n} N[A_1\cdots \overbracket{A_k\cdots A_n\text{あ}}]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ここで $\sum_{k\in\emptyset}=0$ とした．

ジャミを　やっつけた！

3.4　ゴンズが　あらわれた！

式 (5)

$$
\begin{aligned}
N[A_1\cdots A_n]A_{n+1} =& N[A_1\cdots A_n A_{n+1}] \\
&+ \sum_{k\in N_n} N[A_1\cdots \overbracket{A_k\cdots A_n A_{n+1}}]
\end{aligned}
$$

の証明．$A_{n+1} \to$ あ がフェルミオンの時．右辺第一項を移行した式を計算．

$$
\begin{aligned}
&N[A_1 \cdots A_n]\,\text{あ} - N[A_1 \cdots A_n\text{あ}] \\
&\quad = \sum_{P \in \mathfrak{P}(N_n)} (-1)^p \left\{ \left(\prod_{i \in P} A_i^- \right) \left(\prod_{j \in N_n - P} A_j^+ \right) \text{あ}^- - \left(\prod_{i \in P} A_i^- \right) N \left[\left(\prod_{j \in N_n - P} A_j^+ \right) \text{あ}^- \right] \right\} \\
&\quad = \sum_{P \in \mathfrak{P}(N_n)} (-1)^p \left(\prod_{i \in P} A_i^- \right) \left\{ \left(\prod_{j \in N_n - P} A_j^+ \right) \text{あ}^- - N \left[\left(\prod_{j \in N_n - P} A_j^+ \right) \text{あ}^- \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

p はフェルミオンの交換回数．ここで A をボソン B とフェルミオン F に分ける．ボソンとフェルミオンは可換だから，$\displaystyle\prod_{j \in N_n - P} A^+ = B_1^+ \cdots B_b^+ F_1^+ \cdots F_f^+$ とかける．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{P \in \mathfrak{P}(N_n)} (-1)^p \left(\prod_{i \in P} A_i^- \right) \left\{ \left(\prod_{j \in N_n - P} A_j^+ \right) \text{あ}^- - N \left[\left(\prod_{j \in N_n - P} A_j^+ \right) \text{あ}^- \right] \right\} \\
&= \sum_{P \in \mathfrak{P}(N_n)} (-1)^p \left(\prod_{i \in P} A_i^- \right) \left\{ \left(\prod_{k \in N_b} B_k^+ \right) \left(\prod_{\ell \in N_f} F_\ell^+ \right) \text{あ}^- - (-1)^f \text{あ}^- \left(\prod_{k \in N_b} B_k^+ \right) \left(\prod_{\ell \in N_f} F_\ell^+ \right) \right\} \\
&= \sum_{P \in \mathfrak{P}(N_n)} (-1)^p \left(\prod_{i \in P} A_i^- \right) \left(\prod_{k \in N_b} B_k^+ \right) \left\{ \left(\prod_{\ell \in N_f} F_\ell^+ \right) \text{あ}^- - (-1)^f \text{あ}^- \left(\prod_{\ell \in N_f} F_\ell^+ \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

中かっこ $\{\ \}$ の中身を計算する．

$$
\begin{aligned}
&\left(\prod_{\ell\in N_f} F_\ell^+\right)あ^- - (-1)^f あ^- \left(\prod_{\ell\in N_f} F_\ell^+\right)\\
&\qquad =F_1^+\cdots F_f^+ あ^- - (-1)^f あ^- F_1^+\cdots F_f^+\\
&\qquad =F_1^+\cdots F_f^+ あ^- - (-1)^f あ^- F_1^+\cdots F_f^+\\
&\qquad\quad + F_1^+\cdots F_{f-1}^+ あ^- F_f^+ - F_1\cdots F_{f-1}^+ あ^- F_f^+\\
&\qquad\quad + F_1^+\cdots F_{f-2}^+ あ^- F_{f-1}^+ F_f^+ - F_1^+\cdots F_{f-2}^+ あ^- F_{f-1}^+ F_f^+\\
&\qquad\quad + F_1^+\cdots F_{f-3}^+ あ^- F_{f-2}^+ F_{f-1}^+ F_f^+ - F_1^+\cdots F_{f-3}^+ あ^- F_{f-2}^+ F_{f-1}^+ F_f^+\\
&\qquad\quad \vdots\\
&\qquad\quad + F_1^+ あ^- F_2^+\cdots F_f - F_1^+ あ^- F_2^+\cdots F_f\\
&\qquad =F_1^+\cdots F_{f-1}^+\{F_f^+, あ^-\}\\
&\qquad\quad + (-1)^1 F_1^+\cdots F_{f-2}^+\{F_{f-1}^+, あ^-\}F_f^+\\
&\qquad\quad + (-1)^2 F_1^+\cdots F_{f-3}^+\{F_{f-2}^+, あ^-\}F_{f-1}^+ F_f^+\\
&\qquad\quad \vdots\\
&\qquad\quad + (-1)^{f-1} F_1^+ あ^- F_2^+\cdots F_f^+ - (-1)^f あ^- F_1^+\cdots F_f^+\\
&\qquad =F_1^+\cdots F_{f-1}^+\{F_f^+, あ^-\}\\
&\qquad\quad + (-1)^1 F_1^+\cdots F_{f-2}^+\{F_{f-1}^+, あ^-\}F_f^+\\
&\qquad\quad + (-1)^2 F_1^+\cdots F_{f-3}^+\{F_{f-2}^+, あ^-\}F_{f-1}^+ F_f^+\\
&\qquad\quad \vdots\\
&\qquad\quad + (-1)^{f-1}\{F_1^+, あ^-\}F_2^+\cdots F_f^+\\
&\qquad =\sum_{k\in N_f}(-1)^{f-k}\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell<k}} F_\ell^+\right)\{F_k^+, あ^-\}\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell>k}} F_\ell^+\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

二つ目の等号はゼロを足した．三つ目の等号は，一段目と二段目の左辺，二段目と三段目の右辺，三段目と四段目の左辺，というように，ボソンの時とは違って，縦に和をとって反交換関係を作っている．一番最後の項は元々一段目の右辺だった項である．
また，おやぶんゴーストの途中と同様に

$$
\{F_k^+, あ^-\} = \overbracket{F\ あ}
\tag{17}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
&\left(\prod_{\ell\in N_f} F_\ell^+\right)\text{あ}^- - (-1)^f\,\text{あ}^-\left(\prod_{\ell\in N_f} F_\ell^+\right)\\
&\qquad = \sum_{k\in N_f}(-1)^{f-k}\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell<k}} F_\ell^+\right)\overbracket{F_k\,\text{あ}}\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell>k}} F_\ell^+\right)\\
&\qquad = \sum_{k\in N_f}\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell<k}} F_\ell^+\right)\overbracket{F_k\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell>k}} F_\ell^+\right)\text{あ}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

縮約をとっていてもフェルミオンの交換では負号がつくことに注意．よって

$$
\begin{aligned}
&N[A_1\cdots A_n]\,\text{あ} - N[A_1\cdots A_n\text{あ}]\\
&= \sum_{P\in\mathfrak{P}(N_n)}(-1)^p\left(\prod_{i\in P}A_i^-\right)\left(\prod_{k\in N_b}B_k^+\right)\left\{\sum_{k\in N_f}\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell<k}} F_\ell^+\right)\overbracket{F_k\left(\prod_{\substack{\ell\in N_f-\{k\}\\ \ell>k}} F_\ell^+\right)\text{あ}}\right\}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ボソンとフェルミオンの縮約はゼロになる $\overbracket{B\,\text{あ}} = 0$ ので，次のようにもかける．

$$
\begin{aligned}
&N[A_1\cdots A_n]\,\text{あ} - N[A_1\cdots A_n\text{あ}]\\
&= \sum_{P\in\mathfrak{P}(N_n)}(-1)^p\left(\prod_{i\in P}A_i^-\right)\left\{\sum_{k\in N_n-P}\left(\prod_{\substack{\ell\in N_n-P-\{k\}\\ \ell<k}} A_\ell^+\right)\overbracket{A_k\left(\prod_{\substack{\ell\in N_n-P-\{k\}\\ \ell>k}} A_\ell^+\right)\text{あ}}\right\}\\
&= \sum_{k\in N_n} N[A_1\cdots \overbracket{A_k\cdots A_n\text{あ}}]
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ここでも $\sum_{k\in\emptyset}=0$ とした．

　ゴンズを　やっつけた！

3.5 ゲマ

式 (6)

$$
\begin{aligned}
&A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n\\
&\quad = N[A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad + \sum_{1-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad + \sum_{2-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\;\overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad + \sum_{3-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\;\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\;\overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad + \cdots
\end{aligned}
$$

の証明.

帰納法で示す.

演算子が二つの時はおやぶんゴースト

$$
AB - N[AB] = \overbracket{AB}
$$

である.

演算子が n 個の時を仮定して，右から A_{n+1} をかける.

$$
\begin{aligned}
&A_1A_2\cdots A_{n-1}A_nA_{n+1}\\
&\quad = N[A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n]A_{n+1}\\
&\qquad + \sum_{1-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\cdots A_{n-1}A_n]A_{n+1}\\
&\qquad + \sum_{2-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\;\overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_n]A_{n+1}\\
&\qquad + \sum_{3-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\;\overbracket{\cdots\cdots}\cdots\;\overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_n]A_{n+1}\\
&\qquad + \cdots
\end{aligned}
$$

これにジャミとゴンズの結果を用いれば

$$
\begin{aligned}
&A_1A_2\cdots A_{n-1}A_nA_{n+1}\\
&\quad =N[A_1A_2\cdots A_{n-1}A_nA_{n+1}]\\
&\qquad +\sum_{1-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\ \overbracket{\cdots\cdots}\cdots\cdots A_{n-1}A_nA_{n+1}]\\
&\qquad +\sum_{2-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\ \overbracket{\cdots\cdots}\cdots\ \overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_nA_{n+1}]\\
&\qquad +\sum_{3-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\ \overbracket{\cdots\cdots}\cdots\ \overbracket{\cdots\cdots}\cdots\ \overbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_nA_{n+1}]\\
&\qquad +\cdots
\end{aligned}
$$

となる．以上より任意の n でゲマは成り立つ．

ゲマを　やっつけた！

3.6　ミルドラース

式 (7)

$$
\begin{aligned}
&T\{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n\}\\
&\quad =N[A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad +\sum_{1-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad +\sum_{2-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad +\sum_{3-\mathrm{pairs}} N[A_1A_2\cdots\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots\ \underbracket{\cdots\cdots}\cdots A_{n-1}A_n]\\
&\qquad +\cdots
\end{aligned}
$$

の証明．

ミルドラースは，T 積がどのような置換であっても，同様に正規積内の順序置換を行えばゲマの形に持っていけることをいうことで証明とする．

$$T\{A_1\cdots A_n\}=(-1)^tA'_1\cdots A'_n \tag{21}$$

とする．t はフェルミオンの交換回数である．

$$N[A_1\cdots A_n]=(-1)^tN[A'_1\cdots A'_n] \tag{22}$$

これはすぐわかる．次もいえる．

$$\sum_{1-\mathrm{pairs}} N[A_1 \underbrace{\cdots\cdots}A_n] = \sum_{1-\mathrm{pairs}} (-1)^t N[A'_1 \underbrace{\cdots\cdots}A'_n] \tag{23}$$

縮約内には T 積が入っているので順番は上の置換通りに変わる．それ以外も入れ替えしていくが，縮約をとっていてもフェルミオンの交換では負号がちゃんと出てくれる．よって T 積と同じ数の負号が出る．縮約数が二つ以上でも同様のことがいえる．

このようにフェルミオンの交換回数は全ての項で同じなので結局ゲマと一致する．

ミルドラースを　やっつけた！